Algorithme du simplexe

Une solution à la programmation linéaire

Hugues Talbot

Laboratoire A2SI

18 mars 2008

Plan

Matrices, inverses etc

- Il est nécessaire de maîtriser un minimum d'algèbre linéaire : matrices (addition, multiplication etc), inverses etc.
- Pour les exercices, TD, TPs et examen, on peut vous demander d'inverser à la main une matrice 3×3.
- Un cours complet d'algèbre linéaire : `http://joshua.smcvt.edu/linearalgebra/` : 440 pages, libre, avec toutes les preuves et la solution de tous les exercices.

Exemple - fabrique de ceintures

- Une usine de ceinture en fabrique de 2 sortes : luxe et standard
- Chaque type demande 1m^2 de cuir
- Une ceinture standard demande 1h de travail
- Une centure de luxe 2h
- Chaque semaine, on dispose de 40m^2 de cuir et de 60h de travail.
- Chaque ceinture standard rapport 3 Euros
- Chaque ceinture de luxe 4 Euros.
- Maximiser le profit.

Formulation

- $x_1 =$ nombre de ceintures de luxe produites par semaine
- $x_2 =$ nombre de ceintures standard produites par semaine
- Maximiser $z = 4x_1 + 3x_2$, avec

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\leq 40 && \text{contrainte sur le cuir} && (1)\\
2x_1 + x_2 &\leq 60 && \text{contrainte sur le travail} && (2)\\
x_1, x_2 &\geq 0 && \text{contrainte de signe} && (3)
\end{aligned}
$$

Conversion en forme standard

- On souhaite convertir toute les inégalités en égalités.
- Pour chaque variable $\leq$ on définit une variable de "manque" s_i. Toutes les s_i sont positives. Ici

$$s_1 = 40 - x_1 - x_2 \tag{4}$$

$$s_2 = 60 - 2x_1 - x_2 \tag{5}$$

- Le problème s'écrit maintenant sous la *forme standard* : Maximiser z, avec :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
z & = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & & & \\
 & & x_1 & + & x_2 & + & s_1 & & & = & 40 \\
 & & 2x_1 & + & x_2 & & & + & s_2 & = & 60 \\
 & & & & x_1, & x_2, & s_1, & & s_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Problème du régime

- On veut suivre un régime qui impose de manger un élément des 4 groupes de base : chocolat, crème glacée, soda et gâteau.
- Une barre de chocolat coûte 50 centimes, une part de crème glacée 20 centimes, chaque bouteille de soda 30 centimes et une part de gâteau 80 centimes.
- Chaque jour je dois ingérer 500 calories, 60g de chocolat, 100g de sucre et 80g de lipides.
- Le contenu nutritionnel de chaque type de nourriture est donné ainsi

	Cal.	Choc. (g)	Sucr. (g)	Lip. (g)
barre chocolat	400	30	20	20
crème glacée	200	20	20	40
cola	150	0	40	10
gâteau	500	0	40	50

Formulation

- On veut minimizer le coût du régime.
- Combien de variables ?
- Exprimer la fonction objectif
- Exprimer les contraintes
- Mettre sous forme standard

Formulation – régime

- Objectif = min $z = 50x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 80x_4$
- Total calories = $400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 \geq 500$
- Total chocolat = $30x_1 + 20x_2 \geq 60$
- Total sucres = $20x_1 + 20x_2 + 40x_3 + 40x_4 \geq 100$
- Total lipides = $20x_1 + 40x_2 + 10x_3 + 50x_4 \geq 80$
- Finalement, tous les x_i sont positifs.

Formulation – forme standard

- Pour des contraintes $\geq$ on définit des variables d'excès e_i toutes positives.
- On obtient :

$$
\begin{array}{ccrcrcrcrccccccc}
z & = & 50x_1 & + & 20x_2 & + & 30x_3 & + & 80x_4 & & & & & & \\
 & & 400x_1 & + & 200x_2 & + & 150x_3 & + & 500x_4 & -e1 & & & & = & 500 \\
 & & 30x_1 & + & 20x_2 & & & & & & -e2 & & & = & 60 \\
 & & 20x_1 & + & 20x_2 & + & 40x_3 & + & 40x_4 & & & -e3 & & = & 100 \\
 & & 20x_1 & + & 40x_2 & + & 10x_3 & + & 50x_4 & & & & -e4 & = & 80
\end{array}
$$

avec x_i et e_i positifs

- Avec des contraintes mixtes (c-à-d $\leq$ et $\geq$) on a à la fois des variables s_i et e_i.
- Les variables s_i et e_i deviennent partie du système au même titre que les variable x_i.

Forme standard générale

- On suppose un problème de programmation linéaire avec m contraintes et n variables sous forme standard.
- Il a la forme suivante : maximiser (ou minimiser) z avec

$$
\begin{array}{rcrcrcccrcl}
z & = & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \dots & + & c_nx_n & & \\
 & & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\
 & & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

et $\forall i, x_i \geq 0$

Matrice principale

On définit :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Note : $n \geq m$, sinon le système est à-priori sur-contraint.

Matrices des variables et contraintes

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

PL sous forme matricielle

Le programme linéaire s'écrit sous forme matricielle :

$$\min \text{ (ou max) } \mathbf{c}^T\mathbf{x} \tag{6}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{7}$$

$$\mathbf{x} \geq 0 \tag{8}$$

Variables de base

- On appelle Base une sous-matrice régulière de **A**. Il faut que la matrice $\mathbf{A}(m, n)$ soit de rang m.
- Une solution de base est obtenue en posant $n - m$ variables égales à 0, et en résolvant pour les m variables restantes, qui sont les variables de base (VB).
- Les $n - m$ variables à 0 sont les *variables hors base* (VHB).
- Des choix différents de VHB donnent lieu à des différentes solutions de base.

Représentation

x_b^t	x_e^t

c_b^t	c_e^t

B base	E colonnes hors base
m colonnes	$n - m$ colonnes

Représentation matricielle

- On a
$$\mathbf{A} = [\mathbf{BE}], \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_b \\ x_e \end{bmatrix}, \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_b{}^T \mathbf{c}_e{}^T \end{bmatrix}$$
- Ce qui donne
$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{c}_b{}^T\mathbf{x}_b + \mathbf{c}_e{}^T\mathbf{x}_e$
$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{Bx}_b + \mathbf{Ex}_e = \mathbf{b}$
- Une solution de base est telle que

$$\mathbf{x}_e = 0 \tag{9}$$
$$\mathbf{Bx}_b = \mathbf{b} \tag{10}$$
$$\mathbf{x}_b = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \tag{11}$$

Exemple

- Soit le système suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & & & = & 3 \\ & & -x_2 & + & x_3 & = & -1 \end{array}$$

- Si on pose VHB $= \{x_3\}$, alors VB $= \{x_1, x_2\}$. On résout

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & 3 \\ & & -x_2 & = & -1 \end{array}$$

  Ce qui donne $x_1 = 2$ et $x_2 = 1$.
- Certains choix de variables peuvent ne pas générer de solution de base.

Solutions de base réalisables

- Une solution de base est dite réalisable (SBR) si

$$\mathbf{x}_b = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq 0$$

- Si le vecteur $\mathbf{x}_b$ contient des termes nuls, on dira que cette solution est une solution de base dégénérée.

Exemple de SBR - 1

- Soit le problème :

$$
\begin{array}{lrrrrrl}
\min & - & x_1 & - & 2x_2 & & \\
\text{avec} & & & & & & \\
& & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\
& & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\
& & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

- Sous forme standard, on a

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrl}
\min & - & x_1 & - & 2x_2 & & & & & & \\
\text{avec} & & & & & & & & & & \\
& & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 4 \\
& & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 5 \\
& & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Exemple de SBR - 2

- On peut essayer de constituer une base en utilisant l'ensemble B = $\{1, 3\}$,

$$\mathbf{B} = [\mathbf{A}_1\mathbf{A}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = [\mathbf{A}_2\mathbf{A}_4] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_b = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

- L'inverse de **B** existe, donc **B** correspond à une base

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Exemple de SBR - 3

- La solution de base correspondante est donc :

$$\mathbf{x}_b = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} > 0$$

- Cette solution est bien une SBR.

Théorèmes fondamentaux

Théorème

La région réalisable pour tout problème de programmation linéaire est un ensemble convexe. Si un PL possède une solution optimale, alors un point extrême de la région réalisable doit être optimal.

Théorème

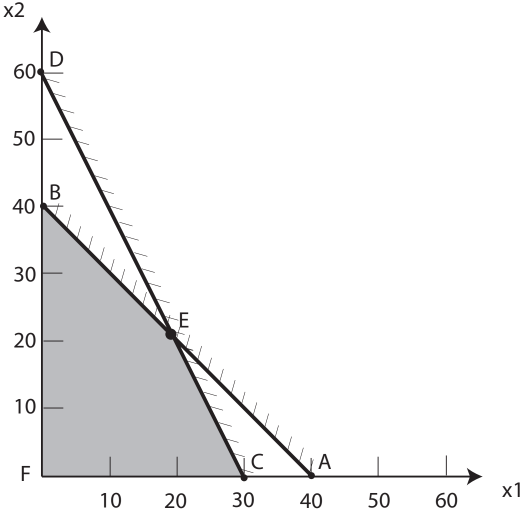
Pour tout LP, il existe un point extrême unique de la région réalisable qui correspond à chaque solution de base réalisable. Également, il existe au moins une SBR qui correspond à chaque point extrême de la région réalisable.

Illustration des théorèmes

On reprend l'exemple des ceintures de cuir, c-à-d maximiser z, avec :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
z & = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & & & \\
 & & x_1 & + & x_2 & + & s_1 & & & = & 40 \\
 & & 2x_1 & + & x_2 & & & + & s_2 & = & 60 \\
 & & & & & & x_1, \; x_2, & & s_1, \; s_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Ceintures de cuir - 1



Ceintures de cuir - 2

On a l'équivalence entre SBR et points extrêmes suivants :

Base	Hors-base	SBR	Point extrême
x_1, x_2	s_1, s_2	$s_1 = s_2 = 0, x_1 = x_2 = 20$	E
x_1, s_1	x_2, s_2	$x_2 = s_2 = 0, x_1 = 30, s_1 = 10$	C
x_1, s_2	x_2, s_1	$x_2 = s_1 = 0, x_1 = 40, s_2 = -20$	Non réalisable, $s_2 < 0$
x_2, s_1	x_1, s_2	$x_1 = s_2 = 0, s_1 = -20, x_2 = 60$	Non réalisable, $s_1 < 0$
x_2, s_2	x_1, s_1	$x_1 = s_1 = 0, x_2 = 40, s_2 = 20$	B
s_1, s_2	x_1, x_2	$x_1 = x_2 = 0, s_1 = 40, s_2 = 60$	F

Preuve

Soit **x** une SBR, de la forme $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots, 0]^T$. Si **x** n'est pas un point extrême, il existe 2 points (solutions) α et β différents de **x** et un scalaire λ tels que :

$$\mathbf{x} = \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta, 0 < \lambda < 1$$

soit

$$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n]^T = \begin{bmatrix} \alpha_b \\ \alpha_e \end{bmatrix}$$

$$\beta = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, \beta_{m+1}, \ldots, \beta_n]^T = \begin{bmatrix} \beta_b \\ \beta_e \end{bmatrix}$$

Alors

$$\lambda\alpha_i + (1-\lambda)\beta_i = 0 \forall i \in [m+1, n]$$

Puisque $\lambda > 0, (1-\lambda) > 0, \alpha_i > 0 et \beta_i > 0$, on a $\alpha_i = \beta_i = 0$, soit $\mathbf{x} = \alpha = \beta$, contradiction.

Nombre de solutions possibles

- Le nombre de bases candidates est $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$. Toutes les candidates ne sont pas inversibles, donc on peut seulement dire que le nombre précédent est une borne supérieure.
- Une méthode basée sur l'exploration des points extrêmes est cependant non-polynomiale.
- L'expérience montre que pour un problème de n variables à m contraintes, la solution optimale est trouvée en moyenne en moins de $3m$ opérations.

SBR adjacentes

- Pour tout problème de PL, deux SBR sont adjacentes si leur ensembles de variables de base ont $m - 1$ variables de base en commun.

L'interprétation géométrique est que les 2 SBRs sont situées le long d'une même arête sur le polytope réalisable.

Description générale de l'algorithme

L'algorithme du simplexe pour une maximisation suit les étapes suivantes :

1. Trouver une SBR pour le PL, appelée la SBR initiale.
2. Déterminer si la SBR courante est optimale. Sinon, trouver une SBR adjacente qui possède une valeur z plus élevée.
3. Retourner au point (2) avec la nouvelle SBR comme SBR courante.

Les deux questions suivantes sont donc : comment détecter l'optimalité, et comment se déplacer.

Coûts réduits

- Pour une SBR, on peut écrire :

$$z = \mathbf{c}_b{}^T \mathbf{x}_b + \mathbf{c}_e{}^T \mathbf{x}_e$$

  et

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_b + \mathbf{E}\mathbf{x}_e = \mathbf{b}$$

- Donc

$$\mathbf{x}_b = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{E}\mathbf{x}_e)$$

- Par substitution

$$z = \mathbf{c_b}^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + (\mathbf{c_e}^T - \mathbf{c_b}^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{E})\mathbf{x_e}$$

- On pose :

$$\overline{\mathbf{c}}_e^T = (\mathbf{c_e}^T - \mathbf{c_b}^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{E})$$

Coûts réduits - 2

- Pour cette SBR, $\mathbf{x}_e = 0$, mais ce 2ème terme correspond à l'augmentation du coût pour une augmentation des variables dans $\mathbf{x}_e$.
- Si tous les coûts sont négatifs (pour une maximisation), toute augmentation des variables de $\mathbf{x}_e$ diminuera la valeur de z, et donc la solution obtenue est optimale.
- Réciproquement pour une minimisation.
- On a donc répondu à la première question (test d'optimalité).

Exemple

- Prenons le cas des ceintures de cuir, avec comme SBR=$\{s_1, s_2\}$ et SHB=$\{x_1, x_2\}$.
- Comme dans ce cas, $\mathbf{c_b}^T = [00]$, on a $\bar{\mathbf{c}}_e^T = \mathbf{c_e}^T = [43]$
- On voit que pour augmenter z le plus efficacement, on doit faire entrer x_1 dans la base, car son coefficient est plus élevé.
- On doit encore décider quelle variable faire *sortir* de la base. Pour cela, on doit faire augmenter x_1 en gardant x_2 à zéro, puis voir quelle variable de base s'annule la première.
- Dans notre cas, s_2 s'annule la première (voir dessin). C'est donc celle qu'on doit faire sortir.
- Si on ne fait pas cela correctement, on risque de choisir une base non réalisable.

Amélioration d'une solution de base

- Pour une maximisation, si notre base est telle que $\bar{\mathbf{c}}_e^T$ ne soit pas strictement négative ou nulle, alors il existe une variable x_k de $\mathbf{x}_e$ telle que $\bar{c}_k > 0$. Une augmentation de x_k est donc susceptible d'améliorer z.
- **Changement de base** Si pour une variable x_k de $\mathbf{x}_e$, $\bar{c}_k > 0$, la solution peut-être améliorée en augmentant x_k.

$$\mathbf{x}_b = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}_k x_k - \mathbf{E}'\mathbf{x}'_e)$$

En fixant $\mathbf{x}'_e = 0$, et en variant x_k seulement :

$$\mathbf{x}_b = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} - A_k x_k) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_k x_k \qquad (12)$$

$$\mathbf{x}_b = \bar{\mathbf{b}} - \mathbf{P}x_k \qquad (13)$$

Augmentation

- Comme originellement x_k est nulle, on ne peut que l'augmenter. Il y a deux cas :
- **cas 1** $\forall i, P_i \leq 0$. En ce cas la solution est non-bornée. x_k tend vers $+\infty$ et z vers $-\infty$.
- **cas 2**, il y a 2 possibilités, pour chaque i :
  1. soit $P_i \leq 0$, $x_{bi} \geq 0$ pour tout $x_k \geq 0$, donc cas non critique : on ne peut pas utiliser cette variable.
  2. soit $P_i > 0$, donc $x_{bi} \leq 0$ pour $x_k \geq \bar{b}_i / P_i$, donc pour tout $P_i > 0$, il existe une valeur maximale de $x_k = \bar{b}_i / P_i$, permettant $x_b \geq 0$.
     On choisit la variable l telle que :

$$l = \min_{i/P_i > 0} \left[\frac{\bar{b}_i}{P_i} \right]$$

En résumé

- On a présenté un algorithme utilisant l'algèbre linéaire à la place de l'intuition graphique.
- Il faut savoir modéliser un problème.
- Il faut comprendre l'algorithme du simplexe.
- Il faut être capable de le faire tourner sur des exemples simples.