Gilles Bertrand
Contrôle du 9 janvier 2009

Algorithmique et Applications
Sans document

I Distance entre chaînes de caractères
(environ 13 pts)

On définit sur les mots trois opérations élémentaires I, E, S :
I : L'*insertion*, on ajoute un caractère à un mot,
E : L'*enlèvement*, on supprime un caractère à un mot,
S : La *substitution*, on remplace un caractère d'un mot par un autre caractère.

Par exemple soit $u = ab$ et $v = bca$. On peut transformer u en v par les 4 opérations :
$ab \xrightarrow{I} acb \xrightarrow{I} bacb \xrightarrow{E} bcb \xrightarrow{S} bca$.

Dans la suite du problème u et v désignent deux chaînes de caractères, on notera n le nombre de caractères de u et m celui de v. La *distance d'édition entre* u *et* v est la quantité $d(u, v)$ qui est le plus petit nombre possible d'opérations permettant de transformer u en v. On dit qu'une séquence d'opérations qui permet de transformer u en v est *optimale* si cette séquence comporte un nombre d'opérations précisément égal à $d(u, v)$.

1) Quelle est la distance d'édition $d(u, v)$ avec $u = ab$ et $v = bca$? Quelle est la distance d'édition $d(u, v)$ avec $u = aluminium$ et $v = albumine$?
On désigne par ϵ le mot vide, c'est à dire le mot qui ne comprend aucun caractère. Que peut-on dire de $d(u, \epsilon)$ et de $d(\epsilon, v)$?
Soit a un caractère quelconque. Que peut-on dire de $d(ua, va)$?

2) Proposer une méthode efficace, basée sur la programmation dynamique, pour trouver une séquence optimale permettant de transformer u en v.

3) Appliquer la méthode dans le cas où $u = abd$ et $v = aabacd$. On remarquera qu'il est possible de condenser l'application de la méthode en utilisant un tableau.

4) Quelle est la complexité de calcul de la méthode ? Justifier votre réponse.

5) Proposer un algorithme glouton permettant de trouver une séquence - pas nécessairement optimale - transformant u en v. Cet algorithme sera donné sous forme de schéma de programme. Quelle est sa complexité de calcul ?

6) La distance d'édition satisfait-elle les trois axiomes d'une distance ? Justifier votre réponse.

II Propriétés d'un opérateur

(environ 7 pts)

Si X est un ensemble fini, on désigne par $|X|$ le cardinal de X.

On se place dans la maille carrée $E = \mathbb{Z}^2$. On considère un élément structurant Γ sur E tel que $\forall x \in E$, $|\Gamma(x)| = K$, K étant un nombre entier. Soit γ_n l'opérateur sur E tel que, $\forall X \subset E$, $\gamma_n(X) = \{x \in E \; ; \; |\Gamma(x) \cap X| \geq n\}$, n étant un nombre entier strictement positif.

1) L'opérateur γ_n est-il croissant ? Est-il idempotent ?

2) Proposer une condition nécessaire et suffisante pour que γ_n soit extensive.

3) Proposer une condition nécessaire et suffisante pour que γ_n soit anti-extensive.

4) Quelle relation existe-t-il entre γ_n et la dilatation ?

5) Quelle relation existe-t-il entre γ_n et l'érosion ?

6) Que peut-on dire du dual de γ_n ?

7) Quel est l'intérêt de cette transformation pour l'analyse d'images ?

Il est important de justifier chacune de vos réponses.

N.B.
- Le barême n'est donné qu'à titre indicatif.
- Il est rappelé l'exigence de clarté et de concision :

Une réponse ne sera considérée comme bonne que si elle satisfait ces critères

Gilles Bertrand
Contrôle du 15 janvier 2009

Algorithmique et Applications
Sans document

I Minimum local

(environ 6 pts)

On peut répondre à la question 2 sans avoir fait la preuve demandée à la question 1.

Soit $T[1..n]$, $n \geq 4$, un tableau de n nombres *tous distincts* tel que $T[1] > T[2]$ et $T[n-1] < T[n]$. On dit qu'un élément du tableau $T[i]$, $i \in [2, n-1]$, est un *minimum local* si cet élément est plus petit que chacun de ses voisins, c'est à dire si $T[i-1] > T[i]$ et $T[i] < T[i+1]$.

A titre d'exemple, le tableau 9 3 7 2 1 4 5 10 comporte 2 minima locaux.

1) ($\simeq$ 3 pts)Démontrer qu'un tel tableau possède au moins un minimum local.

2) ($\simeq$ 3 pts) On peut extraire un minimum local d'un tel tableau simplement en le balayant, cela conduit à un algorithme de complexité $O(n)$. Proposer un algorithme de complexité $O(\log_2 n)$ pour résoudre ce problème. On demande un algorithme qui retourne un seul minimum local même s'il y en a plusieurs. On présentera cet algorithme sous forme de schéma de programme. On supposera que $n = 2^k$.

II Sous-tableau maximal

(environ 8 pts)

La question 2 est indépendante de la question 1.

On dispose d'un tableau $T[1..n]$ composé de n nombres qui sont des entiers positifs ou négatifs. On cherche à déterminer la suite d'entrées consécutives du tableau dont la somme est maximale. Par exemple, pour le tableau $T = [-1, 9, -3, 12, -5, , 4]$, cette somme maximale vaut 18 ($T[2] + T[3] + T[4] = 9 - 3 + 12 = 18$).

-4+5

De façon plus formelle, on note $S(i,j) = \sum\{T[k] \mid i \leq k \leq j\}$, avec $1 \leq i \leq j \leq n$. Le problème consiste à déterminer I et J tels que $S(I,J)$ est maximum.

1) ($\simeq$ 3 pts) Proposer un algorithme simple pour trouver une telle séquence. Votre algorithme doit avoir une complexité meilleure que $O(n^3)$ (par exemple $O(n^2)$). Cet algorithme sera donné sous forme de schéma de programme.

2) ($\simeq$ 5 pts) Proposer un algorithme utilisant la statégie "diviser pour régner" pour trouver une telle séquence. Analyser sa complexité. Votre algorithme doit avoir une complexité meilleure que $O(n^2)$. On supposera que $n = 2^k$.
Indication : *On divise les données en deux. Il y a 3 cas à considérer.*

III - Axe médian

(environ 6 pts)

On considère une image I composée de $n \times n$ points, avec $I \subset \mathbb{Z}^2$.

1) ($\simeq$ 3 pts) Proposer une méthode pour extraire l'axe médian relatif à la distance d_8 d'un objet $X \subset I$. Cette méthode doit employer exclusivement les opérateurs de base de la morphologie (dilatation, érosion, ouverture, fermeture) et les opérations ensemblistes élémentaires. De plus on cherchera une méthode qui minimise l'espace mémoire employé. On s'autorisera à employer des boucles du type "tant que...".

2) ($\simeq$ 3 pts) Justifier soigneusement votre méthode. A cette occasion on rappellera quels sont les liens qui existent entre l'axe médian et la transformation de distance, entre la transformation de distance et les opérateurs morphologiques.

N.B.
- Le barême n'est donné qu'à titre indicatif.
- Il est rappelé l'exigence de clarté et de concision :

Une réponse ne sera considérée comme bonne que si elle satisfait ces critères