

IF4-ALG1 : Algorithmique
Résumé de cours

Bastien Leblanc

7 janvier 2003

Table des matières

1	Algorithmes gloutons	2
1.1	Procédure globale	2
1.2	Arbre de poids minimum (Kruskal 1)	2
2	Matroïdes	3
2.1	Définitions	3
2.2	Matroïde pondéré	3
2.3	Algorithme glouton associé	3
3	Opérateurs Morphologiques de base	4
3.1	définition	4
3.2	le dual	4
3.3	Enveloppe Convexe	4
3.4	Propriétés	4
3.5	Elément structurant	4
3.6	Erosion et dilatation	4
3.7	Ouverture et fermeture	5
3.8	Dilatation Géodésique	5
4	Transformation de voisinage et de distance	6
4.1	Transformation de voisinage	6
4.2	Transformation de distance	6
4.3	Algorithme parallèle	6
4.4	Algorithme séquentiel	6
4.5	Axe Médian	6
5	Topologie	7
5.1	Homotopie - Point simple	7
5.2	Nombre topologique	7
5.3	Algorithme de squelettisation	7
6	Diviser pour régner	8
6.1	Algorithme général	8
6.2	fouille dichotomique	8
6.3	Tri par fusion	8
6.4	Transformée de Fourier rapide	8
7	Polynômes	9
7.1	Représentation par coefficients	9
7.2	Représentation par valeurs	9
7.3	multiplication rapide de polynômes	9

Chapitre 1

Algorithmes gloutons

1.1 Procédure globale

$x_i = x_0; \pi = \{x_0\}$
Tant que x n'appartient pas à B faire :
choisir $y \in \Gamma(x)$ tel que $h(y) = \min_{y \in \Gamma(x)}(h(y))$
 $\pi = \pi.y$
 $x = y$
fin tant que

1.2 Arbre de poids minimum (Kruskal 1)

$\vec{A} = 0; i = 1$
Tant que $\vec{A} \neq E - 1$ faire
Si $\vec{A} \cup \{u_i\}$ ne contient pas de cycle
alors faire $\vec{A} = \vec{A} \cup \{u_i\}$
 $i = i + 1$
fin tant que

Chapitre 2

Matroïdes

Un matroïde est un couple (M, F) où :

- 1- M est ensemble fini
- 2- F est une famille de sous-ensemble de M appelés sous ensembles indépendants, tel que :
 $\forall f \in F, \forall h \subset f, h \in F$ (propriété d'hérédité)
- 3- $\forall f, h \in F$ si $|f| < |h|$, alors
 $\exists x \in h$, tel que $f \cup \{x\} \in F$ (propriété d'échange)

2.1 Définitions

Soit $f \in F$, on dit que $x \in M$ est une extension de f si $f \cup \{x\} \in F$

On dit que $f \in F$ est maximal si f ne possède aucune extension.

Tous les ensembles indépendants maximaux de M sont de même cardinalité.

2.2 Matroïde pondéré

Un matroïde pondéré est un matroïde avec une application $w : M \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$.

$\forall f \subset M$, on définit $w(f) = \sum w(x)$.

On dit que f est optimal si $w(f)$ est maximal.

2.3 Algorithme glouton associé

Glouton $(M(M, F), w)$

- 1- $F = \emptyset$
- 2- trier M par ordre de poids décroissants
- 3- Pour chaque $x \in M$ pris par ordre de poids décroissants $w(x)$
- 3'- si $f \cup \{x\} \in F$, alors $f = f \cup \{x\}$.
- fin pour
- 4- Retourner f .

Complexité : $O(n * \log n + n * f(n))$.

Chapitre 3

Opérateurs Morphologiques de base

3.1 définition

E , un ensemble quelconque
 $X \subset E$
 $\overline{X} = \{x \in E; x \notin X\}$
 $P(E) = \{X \subset E\}$
Un opérateur est une application :
 $P(E) \rightarrow P(E)$
 $X \subset E \rightarrow \Gamma(X) \subset E$

3.2 le dual

Le dual d'un opérateur Γ est l'opérateur $*\Gamma$ tel que :
 $\forall X \subset E; *\Gamma(X) = \overline{\Gamma(\overline{X})}$

3.3 Enveloppe Convexe

on a :
 $ec(X) = \bigcup \{\overline{xy}; x \in X, y \in X\}$
ou :
 $X_{borne}, ec(X) = \bigcup \{\overline{xy}; x, y \in \partial X\}$

3.4 Propriétés

On dit que
 Γ est extensif si $\forall X \subset E, X \subset \Gamma(X)$
 Γ est antiextensif si $\forall X \subset E, \Gamma(X) \subset X$
 Γ est croissant si $\forall X, Y \subset E, X \subset Y \Rightarrow \Gamma(X) \subset \Gamma(Y)$
 Γ est décroissant si $\forall X, Y \subset E, X \subset Y \Rightarrow \Gamma(Y) \subset \Gamma(X)$
 Γ est idempotent si $\forall X \subset E, \Gamma \circ \Gamma(X) = \Gamma(X)$

Propositions :
 Γ extensif $\Leftrightarrow *\Gamma$ est antiextensif

Γ croissant $\Leftrightarrow *\Gamma$ est croissant

3.5 Elément structurant

$\Gamma : E \rightarrow P(E)$
Symétrique de $P : \Gamma^{-1}$ tel que : $y \in \Gamma^{-1} \Leftrightarrow x \in \Gamma(y)$
 Γ est symétrique si $\Gamma = \Gamma^{-1}$
 Γ est réflexif si $\forall x \in E, x \in \Gamma(x)$
 x est l'origine de $\Gamma(x)$

3.6 Erosion et dilatation

3.6.1 Dilatation

$\forall x \subset E, \Gamma(x) = \bigcup \Gamma(x) = X \oplus \Gamma$
 $X \oplus \Gamma$ est le dilaté de X par Γ

3.6.2 Erosion

$\forall x \subset E, \overline{(X \oplus \Gamma)} = X \ominus \Gamma$
 $X \ominus \Gamma$ est l'érodé de X par Γ .

3.6.3 Propositions

$\forall X \subset E, X \oplus \Gamma = \{x \in E, \Gamma^{-1}(x) \cap X \neq \emptyset\}$
 $\forall X \subset E, X \ominus \Gamma = \{x \in E, \Gamma^{-1}(x) \subset X\}$
 $\forall X \subset E, X \oplus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = (X \oplus \Gamma_1) \cup (X \oplus \Gamma_2)$
 $\forall X \subset E, X \ominus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = (X \ominus \Gamma_1) \cap (X \ominus \Gamma_2)$

3.6.4 Définition

$\Gamma_1 \oplus \Gamma_2$ est un élément structurant tel que : $\forall X \subset E, (\Gamma_1 \oplus \Gamma_2)(x) = \Gamma_1(x) \oplus \Gamma_2$

3.6.5 Propositions

$$\begin{aligned}\forall X \subset E, X \oplus (\Gamma_1 \oplus \Gamma_2) &= (X \oplus \Gamma_1) \oplus \Gamma_2 \\ \forall X \subset E, X \ominus (\Gamma_1 \ominus \Gamma_2) &= (X \ominus \Gamma_1) \oplus \Gamma_2\end{aligned}$$

3.7 Ouverture et fermeture

3.7.1 définition

On appelle **ouverture** (par Γ) l'opérateur sur E tel que :

$$X \subset E \longrightarrow (X \ominus \Gamma^{-1}) \oplus \Gamma = X_\Gamma$$

On appelle **fermeture** (par Γ) le dual de l'ouverture tel que :

$$X \subset E \longrightarrow \overline{(X)}^\Gamma$$

3.7.2 Propositions

$$\forall X \subset E, X_\Gamma = \bigcup_{\Gamma(X) \subset X} \Gamma(X)$$

$$\forall X \subset E, X^\Gamma = (X \oplus \Gamma^{-1}) \ominus \Gamma$$

$X \longrightarrow X_\Gamma$ est anti-extensive, croissante, idempotente.

$X \longrightarrow X^\Gamma$ est extensive, croissante, idempotente.

3.8 Dilatation Géodésique

La **dilatation géodésique** par Γ dans Y est l'opérateur :

$$X \subset E \longrightarrow (X \oplus \Gamma) \cap Y = D_\Gamma(X; Y)$$

La **reconstruction** par Γ dans Y est l'opérateur qui à chaque $X \subset E$ associe le résultat de l'application de la dilatation géodésique répété jusqu'à stabilité : $R_\Gamma(X, Y)$.

Chapitre 4

Transformation de voisinage et de distance

4.1 Transformation de voisinage

- E, Γ élément structurant réflexif
 - $\forall X \subset E, \Psi_\Gamma(x, X) = \text{Min}\{k \in \mathbb{N}; x \in X \oplus \Gamma^k\}$
 On définit $\Gamma^0 = \forall x \in E, \Gamma^0 = \{x\}$

1. On balaye l'image au sens vidéo
 $\Psi(x) = \text{Min}_{y \in \Gamma_1(x)}[\Psi(y) + 1]$ si $x \in X$
 $\Psi(x) = 0$ sinon
2. On balaye l'image en sens vidéo inverse.
 $\Psi'(x) = \text{Min}_{y \in \Gamma_2(x)}[\Psi(x), \Psi(y) + 1]$

4.2 Transformation de distance

$X \subseteq E, \forall x \in E, \Psi_d(x, X) = \text{Min}\{d(x, y); \forall y \in X\}$

4.3 Algorithme parallèle

Algorithme de **Bellman** de plus court chemin avec $\Pi(x) = \text{Min}_{y \in \Gamma(x)}[\Pi(y) + l(y, x)]$

Algo $\Psi //$
 (données $X \subset I \subset \mathbb{Z}^2, \text{I fini}$)
 (résultat : $\Psi(x) = \Psi_{d_s}(x, \bar{X})$)
 $\forall x \in I$, faire : $\Psi(x) = 0$ si $x \in I \cap X$
 $\Psi(x) = \infty$ si $x \in X$

Tant que
 $\forall x \in I$, faire $\Psi(x) = \text{Min}_{y \in \Gamma_s(x)}[\Psi(y) + 1]$
 Jusqu'à stabilité.

Fin tant que.

4.5 Axe Médian

4.5.1 Boule maximale

Soit $X \subset E$, on dit qu'une boule $B_d(x, \rho)$ est maximale (pour X) si
 $B_d(x, \rho) \subset X$ et
 $\forall B_d(y, \rho')$ si $B_d(x, \rho) \subset B_d(y, \rho') \subset X$ alors $x = y$
 et $\rho = \rho'$

4.5.2 Axe médian

Soit $X \subset E$, l'axe médian de X est l'ensemble :
 $AM(X) = \{x \in X; \exists B_d(x, \rho) \text{ maximale}\}$

4.5.3 Reconstruction de l'objet

On peut reconstituer l'objet à partir de l'axe médian :
 $X = \bigcup \{B_d(x, \rho); (x, \rho) \in AM(X)\}$
 Pour calculer $AM(X)$ on a la formule :
 $x \in AM(X) \iff \forall y \in \Gamma_8(x), \Psi_d(x, \bar{X}) \geq \Psi_d(y, \bar{X})$

4.4 Algorithme séquentiel

$\Gamma_1 =$	X	X	X
	X		
$\Gamma_2 =$			X
	X	X	X

Chapitre 5

Topologie

5.1 Homotopie - Point simple

Soit $x \in \mathbb{Z}^2$, (n, \bar{n})

Soit $x \in X$, on dit que x est n -simple si "on peut enlever x de X sans changer de topologie de X et de \bar{X} "

1. X et $X \setminus \{x\}$ ont la même nombre de composantes n -connexes
2. \bar{X} et $\bar{X} \cup \{x\}$ ont la même nombre de composantes \bar{n} -connexes

On dit que Y est **sous-homotopie** à X si on peut obtenir Y à partir de X en détruisant de façon itérative des points n -simples de x .

Soit $x \in \bar{X}$, on dit que x est simple pour X si $x \in n$ -simple pour $X \cup \{x\}$.

On dit que X et $Y \subset \mathbb{Z}^2$ sont **homotopes**

Proposition : $x \in \mathbb{Z}^2$ est n -simple pour $X \Leftrightarrow x$ est \bar{n} -simple.

Soit $X \subset \mathbb{Z}^2$, $Y \subset X$ est un noyau homotopique de X si :

1. Y est sous homotopie à X .
2. $\forall x \in Y$, x est non n -simple.

On dit que $x \in X$ est un point n -extrémité pour X si $|\Gamma(x) \cap X| = 1$.

5.2 Nombre topologique

Soit $x \in \mathbb{Z}^2$, et $X \subset \mathbb{Z}^2$, on définit le nombre topologique :

$T_n(x, X) =$ Nombre de composantes n -connexes de $\Gamma_8^*(x) \cap X$ qui sont n -voisins de x .

Propositions :

$x \in \delta(x) \Leftrightarrow \bar{T} > 0$ (Point du bord)

x est un point intérieur $\Leftrightarrow \bar{T} = 0$

5.3 Algorithme de squelettisation

Y est un squelette de X si Y est un noyau homotopique de X .

5.3.1 Technique de la sous-maille

On divise la maille carrée en 4 sous-mailles. A chaque itération, on ne considère que les points d'une même sous-maille. (cf. cours pour exemples)

5.3.2 Stratégie directionnelle

$x \in X$ est un point Nord (respectivement Sud, Est, Ouest) si x a un voisin nord (respectivement S, E, O) qui appartient à \bar{X}

Algo :

- A chaque itération on considère les points de type N (respect. S, E, O)
- On enlève tous les points simple non extrémité (en parallèle)
- On réitère jusqu'à stabilité.

Complexité : $X \subset I(n * n) N = n^2$

1 itération : $o(N) \Rightarrow$ au maximum $o(n^3)$.

Chapitre 6

Diviser pour régner

6.1 Algorithme général

fonction RP(x) (retourne la solution de l'exemple x)

1. Si x est petit ou simple retourner ADHOC(x)
2. Sinon **décomposer** x en k exemplaires x_1, x_2, \dots, x_k
3. Pour i=1 à k faire $y := RP(x_i)$
4. **fusionner** les y_i pour obtenir une solution y à x
5. retourner y.

6.2 fouille dichotomique

Tri classique :

fonction dich(T[1,...,n],x)

- si n=0 et x|T[1] alors retourner 0
- sinon retourner rechdich(T,x)

fonction rechdich(T[i,j],x)

- si i=j alors retourner i

- $k := (i + j + 1)/2$

- si $x < T(k)$ alors retourner rechDich(T[i,k],x)

- sinon retourner rechdich(T[k,j],x)

complexité : $t(n) = t(\frac{n}{2}) + c \Rightarrow o(\log n)$

6.3 Tri par fusion

Algorithme :

procédure trifusion(T[1...n])

si n=1 alors retourner T[1...n]

créer tableaux U[1... $\frac{n}{2}$] et V[1... $\frac{n+1}{2}$]

U := T[1... $\frac{n}{2}$]

V := T[1+ $\frac{n}{2}$...n]

trifusion(U) ; trifusion(V)

fusionner(T,U,V)

complexité : $t(n) = t(\frac{n}{2}) + c * n \Rightarrow o(n * \log n)$

6.4 Transformée de Fourier rapide

On suppose $n=2^p$

TFR(a)

n := longueur(a)

si n=1, alors retourner a

$\omega := 1 ; \omega_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$

$a^0 := (a_0, a_2, \dots, a_{n-2}) ; a^1 := (a_1, a_3, \dots, a_{n-1})$

$y^0 := TFR(a^0) ; y := TFR(a^1) ;$

Pour k=0 à $\frac{n}{2} - 1$ faire

$y_k := y_k^0 + \omega y_k^1$

$y_{k+n/2} := y_k^0 - \omega y_k^1$

$\omega := \omega * \omega_n$

fin pour

retourner y

complexité : $t(n) = 2t(\frac{n}{2}) + c * n \Rightarrow o(n * \log n)$

6.4.1 Transformée de fourier inverse rapide

Il suffit de remplacer a par y et ω_n par ω_n^{-1} dans l'algorithme de TFR.

Chapitre 7

Polynômes

7.1 Représentation par coefficients

On dit qu'un polynôme A est représenté par ses coefficients si on connaît $A(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j$
Evaluation de $A(x_0)$: on a $A(x_0) = a_0 + x_0[a_1 + x_0[a_2 + x_0[\dots]]]$ Cet algorithme est en $\mathbf{o(n)}$

7.2 Représentation par valeurs

C'est un ensemble de n points du plan représenté par leurs coordonnées :
 $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})\}$

Proposition : Une représentation par valeurs détermine un polynôme unique :

Formule de Lagrange :

$$A(x) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k * \frac{\prod_{j \neq k} (x - x_j)}{\prod_{j \neq k} (x_k - x_j)} = y_p \quad (7.1)$$

Passage de la représentation par coefficients à celle par valeurs en $\mathbf{o(n^2)}$. Addition et multiplication en $\mathbf{o(n)}$.

7.3 multiplication rapide de polynômes

1. **doubler leur borne** ($\mathbf{o(n)}$) : on ajoute n coefficients nuls
2. **évaluer** ($\mathbf{o(n \log(n))}$) : on calcul des représentations par valeur de A et B en appliquant la TF d'ordre $2n$ (valeurs des polynômes sur les racines $(2n)^{eme}$ de l'unité)
3. **multiplication point à point** ($\mathbf{o(n)}$)
4. **représentation par coefficient** ($\mathbf{o(n \log(n))}$) : avec TF^{-1}

Complexité : $\mathbf{o(n \log(n))}$.