Introduction à l'optimisation

Programmation linéaire

Hugues Talbot

Laboratoire A2SI

17 mars 2008

Plan

Intervenants

- Hugues Talbot : Introduction, programmation linéaire, simplexe.
- Hugues Talbot : Programmation en nombres entiers : coupes de Gomorry, B&B.
- Yskandar Hamam : Problèmes de flots.

Contenu du cours

- Introduction au problème, motivations
- Programmation linéaire
- Modélisation
- Méthode du simplexe
- Problèmes duaux/primaux
- Liens avec les graphes
- Programmation en nombre entiers
- Introduction aux autres méthodes d'optimisation

Emplois du temps et contrôle

- Partie Talbot
- 12h cours, 4h TD
- Partie Hamam
- 4h cours, 4h TD
- 1 TP de 3h
- Contrôle écrit, 2h, avec documents.

Exemples de problèmes

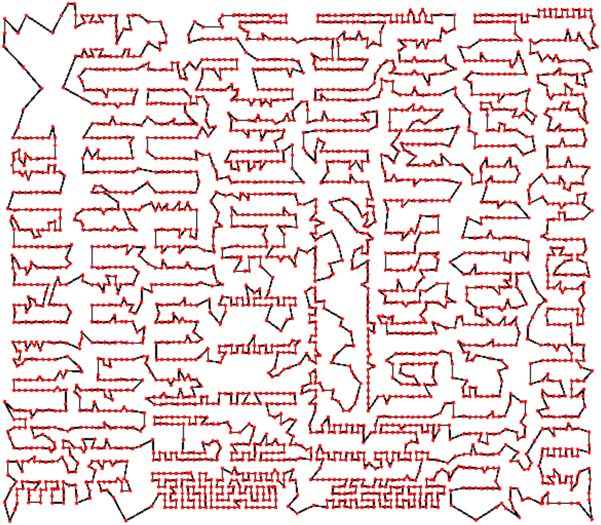
- Problème du voyageur de commerce (Travelling Salesman Problem – TSP) ;
- Autres problèmes NP-difficiles : knapsack, etc.
- Transport, consommation, réseaux, etc.

TSP

- Soit un voyageur de commerce devant visiter N villes
- Quel parcours minimise la distance totale parcourue ?
- Le problème décisionnel associé : “soit un réseau de N villes, existe t-il un parcours de longueur inférieure à K kilomètre ?” appartient à NP.
- Il n’existe pas de méthode connue fondamentalement meilleure que celle qui consiste à tout essayer :
  - 2 villes : 1 parcours (équivalents)
  - 5 villes : 60 parcours
  - n villes : $n!/2$ parcours.

Exemples de TSP - PCB routing, 3038 trous

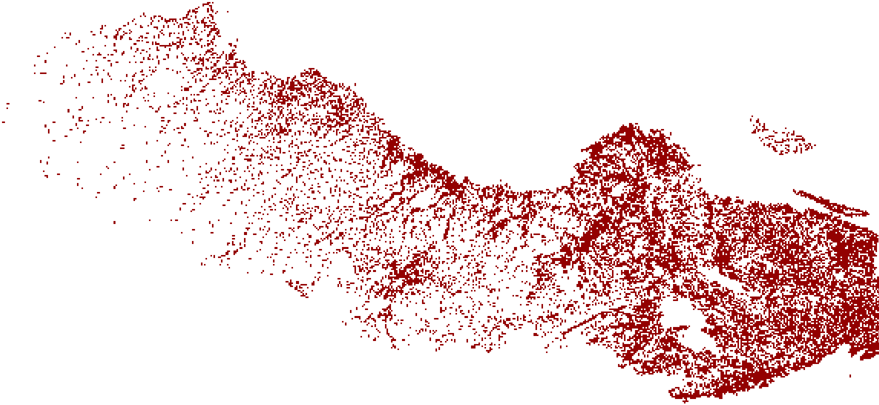
Exemples de TSP - PCB routing, 3038 trous



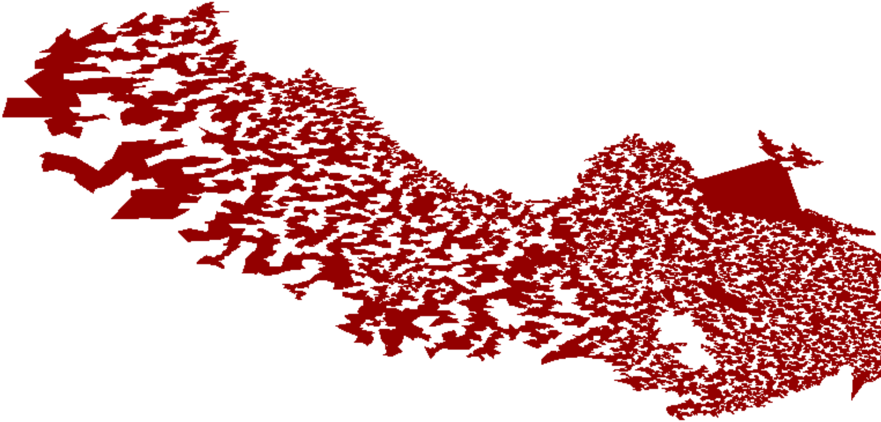
Histoire du TSP

Année	Équipe	Taille
1954	Dantzig, Fulkerson, Johnson	49
1971	Held, Karp	64
1977	Grötschel	120
1987	Padberg, Rinaldi	2392
2004	Applegate et al.	24978

Record actuel : tour de Suède



Record actuel : tour de Suède



Allocation de ressources disponibles

- Étant donné un pb, allouer les ressources au mieux.
- Très courant : argent, matériaux, personnel, temps, etc.
- Certains problèmes ont une solution optimale calculable, d'autres non.
- Une classe importante de problèmes non triviaux à solution optimale calculable sont les problèmes de *programmation linéaire*.

Nourriture pour chiens

- Soit une entreprise de nourriture pour chiens, qui fabrique 2 types de granulés : le Wag-Tail (W) et le Bark-Mad (B).
- Chacun des types utilise un mélange de légumes, boeuf et poisson, dans les proportions suivantes :

Ingrédient	Qté totale	Qté dans B	Qté dans W
Légumes	1400 kg	4 kg	4 kg
Poisson	1800 kg	6 kg	3 kg
Boeuf	1800 kg	2 kg	6 kg

- On suppose que la companie opère un bénefice de 12 Euros sur chaque paquet de B et de 8 euros sur ceux de W.
- Comment l'entreprise peut-elle faire pour maximiser son profit ?

Formulation

- On note par B le nombre de paquet de Bark-Mad produits, et par W le nombre de paquets de Wag-Tail.
- De la table précédente on déduit que la quantité totale de légumes consommé sera de $4W + 4B$ kg, mais qu'on ne peut en aucun cas utiliser plus de 1400 kg de légumes. Donc :

$$4B + 4W \leq 1400 \qquad (1)$$

Formulation II - contraintes

- De même :

$$6B + 3W \leq 1800 \tag{2}$$

- et

$$2B + 6W \leq 1800 \tag{3}$$

- finalement B et W sont tous deux positifs.

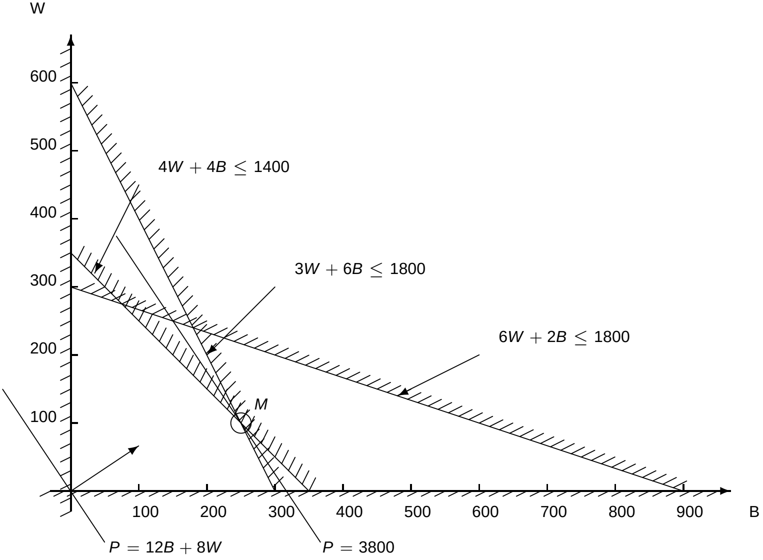
Formulation III - objectif

- Le profit total est :

$$P = 12B + 8W \tag{4}$$

- On cherche à maximiser P
- Pour un problème de cette nature : un dessin

Nourriture pour chiens, forme graphique



Solution

- On déplace une ligne à partir de l'origine parallèlement à elle-même d'équation égale à P.
- On s'arrête lorsqu'on maximise P en satisfaisant les contraintes
- Ici la solution est $B = (250, 100)$ – En ce point 2 ressources au moins sont totalement utilisées.

Vocabulaire & notes

- Un solution est réalisable si elle satisfait les contraintes ;
- Ensemble des solution réalisable forme un polygone (polyèdre, polytope) convexe ;
- La solution optimale est située sur une extrémité du polygone ;
- Pour trouver la solution il suffit d'explorer les points extrêmes du polygone.
- On note qu'on passe d'un ensemble infini de solution possible à un ensemble fini.

Solutions possibles à un problème de PL

1. La solution est unique (cas précédent) ;
2. La solution n'est pas forcément unique ;
3. Il n'y a pas forcément de solution ;
4. Il peut ne pas y avoir de solution bornée.

Historique

- En 1947, G. B. Dantzig travaillait come civil au Pentagone en tant qu'expert mathématicien ;
- Il avait à résoudre des problèmes de planning (avion, personnel, etc) ;
- Après discussion avec l'économiste T. Koopmans, il se rendit compte qu'il n'existait aucune méthodologie pour trouver une solution à ces problèmes.
- Dantzig s'est donc mis à en chercher une.

Idée de base

- En plus de 3 dimensions, l'objet géométrique équivalent à un polygone est appelé un *polytope*, et en topologie algébrique, un *simplexe*.
- Si la solution est sur une des arêtes du polytope, on peut partir d'une solution réalisable, parcourir les arêtes jusqu'à trouver un sommet optimal.
- Dantzig pensait que ça ne serait pas efficace, mais empiriquement on trouve la solution optimale en autant de déplacement que de dimensions dans l'espace des solutions (donc souvent très peu).

La méthode du simplexe

1. Partir d'une solution réalisable et calculer la fonction objectif en ce point ;
2. Trouver les arêtes de frontières de l'ensemble réalisable passant par ce point, calculer si la fonction objectif s'améliore en se déplaçant le long de cette arête ;
3. Se déplacer le long de l'arête donnant la plus grande augmentation ;
4. Répéter (2) et (3) jusqu'à ce que la fonction objectif n'augmente plus. On a trouvé la solution optimale.

Sur l'exemple de la nourriture pour chiens

- On élimine les inégalités par 3 variables artificielles s_i.
- On maximize $P = 12B + 8W$
- Avec les contraintes :

$$4B + 4W + s_1 = 1400 \tag{5}$$
$$6B + 3W + s_2 = 1800 \tag{6}$$
$$2B + 6W + s_3 = 1800 \tag{7}$$

Terminologie

- Ensemble des valeurs B, W et s_i = *solution réalisable*
- Une solution avec m équations et m inconnues avec certaines de ces variables à 0 est une solution de base
- L'ensemble des m variables non à zero forme une *base*.

Choix initial

- Pour former une solution de base, on doit choisir 3 variables et mettre les autres à 0.
- On peut poser $B = W = 0$ et résoudre pour les s_i
- Cela donne :

$$s_1 = 1400 - 4B - 4W \tag{8}$$
$$s_2 = 1800 - 6B - 3W \tag{9}$$
$$s_3 = 1800 - 2B - 6W \tag{10}$$
$$P = 12B + 8W \tag{11}$$

- Géométriquement, cette solution est réalisable et correspond à l'origine. Malheureusement pour ce choix, $P = 0$, ce qui n'est pas optimal.

Première itération

- Pour augmenter P, on peut choisir d'augmenter B ou W. Comme B offre le plus grand gain, on choisit cette variable. W reste à 0.
- On introduit donc B dans la base, mais B ne peut pas être plus grand que 300, sinon s_2 deviendrait négative. On choisit donc $B = 300$, ce qui induit $s_2 = 0$.
- On réexprime le système avec les variables de base en fonction des variables hors-base :
  la deuxième équation devient :

$$\begin{aligned} s_2 &= 1800 - 6B - 3W \\ -6B &= 1800 - s_2 - 3W \\ B &= 300 - \frac{1}{6}s_2 - \frac{1}{2}W \end{aligned}$$

Résultat de la première itération

- En substituant l'identité de B dans la première equation :

$$s_1 = 1400 - 4(300 - \frac{1}{6}s_2 - \frac{1}{2}W) - 4W = 200 + \frac{2}{3}s_2 - 2W$$

- En faisant de même pour la troisième équation et la fonction objectif, on obtient :

$$\begin{aligned}
B &= 300 - \frac{1}{6}s_2 - \frac{1}{2}W && (12)\\
s_1 &= 200 + \frac{2}{3}s_2 - 2W && (13)\\
s_3 &= 1200 + \frac{1}{3}s_2 - 5W && (14)\\
P &= 3600 - 2s_2 + 2W && (15)
\end{aligned}$$

- Maintenant, avec s_2 et W à zero, le profit est de 3600.

Seconde itération

- On peut encore faire mieux en augmentant W, mais pour que s_1 reste positive, W ne peut pas être plus grand que 100.
- On introduit donc W dans la base, avec $W = 100$ ce qui induit $s_1 = 0$.
- On réexprime le système avec ces données :

$$W = 100 - \frac{1}{2}s_1 + \frac{1}{3}s_2 \tag{16}$$

$$B = 250 + \frac{1}{4}s_1 - \frac{1}{3}s_2 \tag{17}$$

$$s_3 = 700 + \frac{5}{2}s_1 - \frac{4}{3}s_2 \tag{18}$$

$$P = 3800 - s_1 - \frac{4}{3}s_2 \tag{19}$$

- Maintenant le profit est de 3800.

Optimum

- On ne peut plus augmenter le profit P, car augmenter s_1 ou s_2 diminue P.
- On peut interpreter le fait que s_1 (légumes) et s_2 (poisson) soient à 0 par le fait que ces ressources sont complètement consommées, ce qui n'est pas le cas de s_3 (boeuf).

Résumé

- La méthode du simplexe permet d'optimiser les problèmes de programmation linéaire.
- La méthode a une interprétation géométrique simple, et donne lieu à un algorithme.
- En pratique, quelques itérations suffisent pour obtenir l'optimum quand il existe.
- Nous verrons dans la suite du cours l'algorithme en détail, y compris les cas limites.