Problèmes de transport

formulation des problèmes d'affectation

Hugues Talbot

Laboratoire A2SI

31 mars 2009

Plan

Problèmes de Transport

- Introduction
- Distribution
- Théorie
- Équilibrage
- Modélisation

Solution des problèmes de transport

- Solution de base initiale

Problèmes d'affectation

- Affectation

Problème de transbordement

- Transbordement

Conclusion

- Conclusion

Problèmes linéaires particuliers : problèmes de transport

- Certains problèmes en programmation linéaire ont une structure particulière que l'on peut exploiter ;
- On peut les résoudre comme d'habitude par un simplexe, mais on peut aussi les résoudre plus simplement et plus efficacement.
- Certains de ces problèmes sont formulés en entier. La solution est en entier aussi, mais la résolution n'est pas plus difficile.
- Le mieux est de donner un exemple

Distribution d'électricité

Soit un série de villes alimentées en électricité par des centrales. La situation est résumée par la table suivante :

	Cité 1	Cité 2	Cité 3	Cité 4	Puissance fournie (GWh)
Centrale 1	€8	€6	€10	€9	35
Centrale 2	€9	€12	€13	€7	50
Centrale 3	€14	€9	€16	€5	40
Demande (GWh)	45	20	30	30	

Ici, les coût au milieu de la matrice sont ceux de production pour 1GWh.
Formulez le problème pour minimiser le coût pour alimenter toutes les villes.

Formulation

- x_{ij} = nombre de GWh produits à la centrale i et envoyé à la cité j.
- Coût d'acheminement depuis les centrales = coût total =

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} z = & & 8x_{11} & + & 6x_{12} & + & 10x_{13} & + & 9x_{14} \\ & + & 9x_{21} & + & 12x_{22} & + & 13x_{23} & + & 7x_{24} \\ & + & 14x_{31} & + & 9x_{32} & + & 16x_{33} & + & 5x_{34} \end{array}$$

Formulation : contraintes

- Contraintes de production

$$\begin{array}{ccccccccc} x_{11} & + & x_{12} & + & x_{13} & + & x_{14} & \leq & 35 \\ x_{21} & + & x_{22} & + & x_{23} & + & x_{24} & \leq & 50 \\ x_{31} & + & x_{32} & + & x_{33} & + & x_{34} & \leq & 40 \end{array}$$

- contraintes de consommation

$$\begin{array}{ccccccc} x_{11} & + & x_{21} & + & x_{31} & \geq & 45 \\ x_{12} & + & x_{22} & + & x_{32} & \geq & 40 \\ x_{13} & + & x_{23} & + & x_{33} & \geq & 30 \\ x_{14} & + & x_{24} & + & x_{34} & \geq & 30 \end{array}$$

- Plus les contraintes habituelles ($x_{ij} \geq 0$)

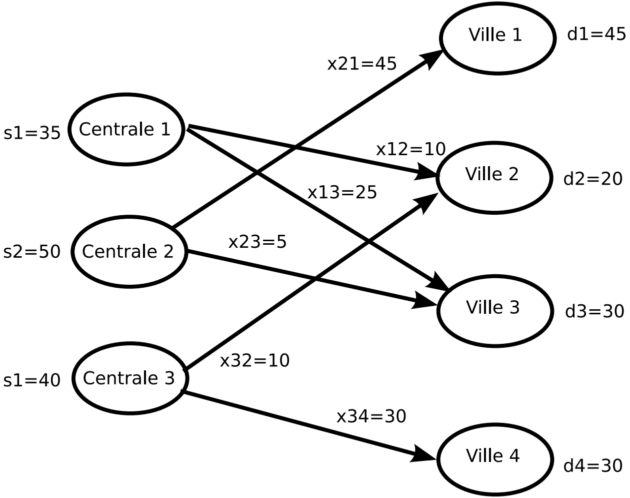
Résolution

- C'est un problème de PL standard
- On peut résoudre par un simplexe (pas à la main...).
- On trouve le résultat suivant :

x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{23}	x_{32}	x_{34}
10	25	45	5	10	30

Pour un coût total de 1020.

Solution sous forme graphique



Forme générale

La forme générale d'un problème de transport est la suivante :

$$\min \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=n} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.t \sum_{j=1}^{j=n} x_{ij} \leq s_i, i \in \{1, \ldots, m\} \qquad \text{(contraintes d'offre)}$$

$$\sum_{i=1}^{i=m} x_{ij} \geq d_j, j \in \{1, \ldots, n\} \qquad \text{(contraintes de demande)}$$

Terminologie

- Si le problème est une maximisation, c'est toujours un problème de transport.
- Si on a
$$\sum_{i=1}^{i=m} s_i = \sum_{j=1}^{j=n} d_j,$$
le problème est dit *équilibré*.
L'exemple donné est bien équilibré.
- Dans un problème équilibré, toutes les contraintes doivent être des égalités (pourquoi ?).

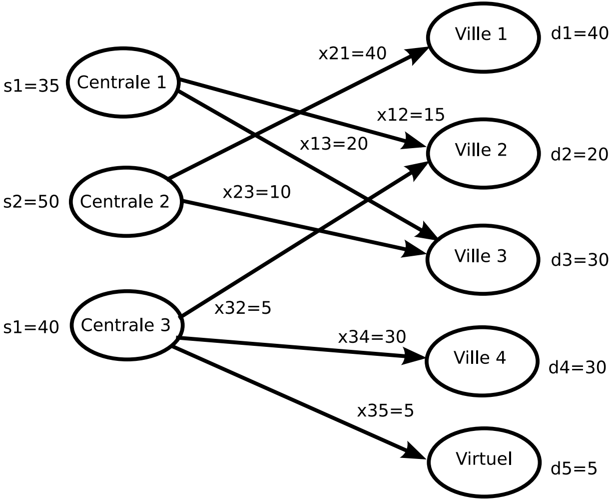
Problèmes équilibrés

- Il est préférable de considérer les problèmes équilibrés. En effet, on montrera qu'il est *relativement* facile de trouver une solution de base réalisable pour ces problèmes.
- De même, les opérations du simplexe dans le cas de problèmes de transport équilibrés se réduisent à des additions et soustractions.

Rendre un problème équilibré

- Pour équilibrer un problème de transport pour lequel il y a trop d'offre, il suffit de créer un *point de demande virtuel* dont la demande correspond à l'offre excédentaire, et pour lequel les coûts de transport sont nuls.
- La demande transportée vers le point virtuel correspond à la capacité non utilisée. De manière naturelle, c'est le point d'offre pour lequel les coûts de transport sont les (question : plus ? moins ?) élevés qui enverra sa capacité vers le lien virtuel.
- Exemple, dans le cas précédent de livraison d'électricité, en supposant que la demande pour la cité 1 soit réduite à 40 GWh. On trouve un excès de 5 GWh, qu'on peut allouer à un point de demande virtuel.
- Notons que la solution optimale est assez différente dans ce cas.

Solution sous forme graphique du cas non équilibré



Représentation sous forme de tableau

- On peut facilement représenter un problème de transport sous forme de tableau :

	Ville 1		Ville 2		Ville 3		Ville 4		Offre
centrale 1	0	8	10	6	25	10	0	9	35
centrale 2	45	9	0	12	5	13	0	7	50
centrale 3	0	14	10	9	0	16	30	5	40
Demande	45		20		30		30		

- On note que les valeurs s'additionne en lignes et en colonnes.

Equilibrage lorsque la demande excède l'offre

- Lorsque la demande excède l'offre, il n'y a pas de solution réalisable (exemple : réduisons la capacité de la centrale 1 à 30 GWh).
- Parfois, la modélisation permet d'avoir de la demande non satisfaite, souvent en ajoutant une pénalité.
- Exemple : production d'eau

Problème de production d'eau

- Deux réservoirs sont prévus pour alimenter 3 villes en eau potable. Chacun des réservoirs peut produire 50 000 m^3 d'eau par jour.
- La demande de chacune des villes est de 40 000 m^3/j
- Si les réservoirs n'arrivent pas à fournir suffisamment d'eau, il y a une pénalité par 1000 m^3 : €20 pour la ville 1, €22 pour la ville 2 et €23 pour la ville 3.
- Les coûts de transport par 1000 m^3 sont résumés ici :

De à	Ville 1	Ville 2	Ville 3
Réservoir 1	€7	€8	€10
Réservoir 2	€9	€7	€8

Solution

	Ville 1		Ville 2		Ville 3		Offre
Réservoir 1	20	$\boxed{7}$	30	$\boxed{8}$	0	$\boxed{10}$	50
Réservoir 2	0	$\boxed{9}$	10	$\boxed{7}$	40	$\boxed{8}$	50
Virtuel	20	$\boxed{20}$	0	$\boxed{22}$	0	$\boxed{23}$	20
Demande	40		40		40		

Modélisation des problèmes d'inventaire

Sur un exemple

- L'entreprise BellesVoiles fabrique des voiles pour bateaux. Elle a son carnet de commande pour les 4 prochains trimestres :

	1er	2eme	3eme	4eme
commandes	40	60	75	25

- BV doit fournir à temps. Elle possède un inventaire de 10 voiles et doit décider de combien de voiles produire par trimestre au début de chacun d'entre eux. On suppose que seules les voiles produites durant un trimestre peuvent être vendues.
- Chaque trimestre, BV peut produire jusqu'à 40 voiles à un coût de €400 par voile, ou bien, en payant ses employés des heures supplémentaires, jusqu'à 40 voiles à un coût de 450 chacune.
- A la fin de chaque trimestre, un coût d'inventaire de €20 doît être appliqué à chaque invendu.
- On veut minimiser les coûts et produire à temps.

Production pour les voiles

- Points d'offre :
  1. Inventaire initial ($s_1 = 10$)
  2. Production du premier trimestre : Normale ($s_2 = 40$), heures sup ($s_3 = 40$).
  3. Production du second trimestre : Normale ($s_4 = 40$), heures sup ($s_5 = 40$).
  4. Production du troisième trimestre : Normale ($s_6 = 40$), heures sup ($s_7 = 40$).
  5. Production du quatrième trimestre : Normale ($s_8 = 40$), heures sup ($s_9 = 40$).

  Total de l'offre : 330

Consommation pour les voiles

- Points de demande :
  1. Demande du premier trimestre ($d_1 = 40$)
  2. Demande du second trimestre ($d_2 = 60$)
  3. Demande du troisième trimestre ($d_3 = 75$)
  4. Demande du quatrième trimestre ($d_4 = 25$)
  5. Demande virtuelle pour équilibrer ($d_5 = 330 - 200 = 130$).
- Remarque : il faut empêcher de produire une voile au 2e trimestre pour remplir la production du 1er ! ce type de transport doit être impossible.

Tableau pour les voiles

	Trimestre 1	Trimestre 2	Trimestre 3	Trimestre 4	Virtuel	Offre
Initial	0	20	40	60	0	
T1 TN	400	420	440	460	0	
T1 HS	450	470	490	510	0	
T2 TN	M	400	420	440	0	
T2 HS	M	450	470	490	0	
T3 TN	M	M	400	420	0	
T3 HS	M	M	450	470	0	
T4 TN	M	M	M	400	0	
T4 HS	M	M	M	450	0	
Demande	40	60	75	25	130	

Solution pour les voiles

	Trimestre 1		Trimestre 2		Trimestre 3		Trimestre 4		Virtuel		Offre
Initial	10	0		20		40		60		0	10
T1 TN	30	400	10	420		440		460		0	40
T1 HS		450		470		490		510	40	0	40
T2 TN		M	40	400		420		440		0	40
T2 HS		M	10	450		470		490	30	0	40
T3 TN		M		M	40	400		420		0	40
T3 HS		M		M	35	450		470	5	0	40
T4 TN		M		M		M	25	400	15	0	40
T4 HS		M		M		M		450	40	0	40
Demande	40		60		75		25		130		

Trouver une base de départ

- Soit un problème de transport avec m points d'offre et n points de demande. C'est un problème avec $m+n$ contraintes d'égalité.
- Il est difficile de trouver une SBR initiale dans le cas des égalités strictes (pourquoi ?).
- Une remarque est très importante : dans les problèmes de transport à $m+n$ égalités, une de ces égalités est redondante. autrement dit, si on trouve un ensemble de x_{ij} qui satisfait toutes les contraintes sauf une, alors la dernière est également satisfaite.

Variables indépendantes

- par exemple, dans le cas de la distribution d'électricité, si on ignore la première égalité, on voit qu'elle est tout de même satisfaite par la solution.
- Dans les $m + n - 1$ contraintes restantes, on ne peut pas se contenter de prendre n'importe quelle collection de $n + m - 1$ variables comme base de départ. On peut tomber sur une matrice de rang trop faible.

Boucles et bases

- Une séquence de au moins 4 cellules d'un tableau est une boucle si et seulement si :
  - toute paire consécutive de cellules sont soit sur la même ligne, soit sur la même colonne
  - aucun triplet de cellules sont sur la même ligne ou colonne
  - la première et la dernière cellule sont consécutive (soit sur la même ligne, soit sur la même colonne)
- On a le théorème suivant :
  Dans un problème de transport équilibré avec m producteurs et n consommateurs, les cellules correspondant à un ensemble de $m+n-1$ variables forment une solution de base si et seulement si l'ensemble des cellules correspondant ne contient pas de boucles.

Méthodes pour trouver une SBR initiale

Il y a trois méthodes classiques

1. La méthode du coin supérieur gauche ;
2. La méthode du coût minimum ;
3. La méthode de VOGEL.

Exemple de problème d'affectation

- Une fabrique M a 4 machines et 4 tâches à compléter
- Chaque machine doit lui voir assigner une tâche. Le temps de mise en œuvre est donné par la table suivante :

	T1	T2	T3	T4
Machine 1	14	5	8	7
Machine 2	2	12	6	5
Machine 3	7	8	3	9
Machine 4	2	4	6	10

- La fabrique veut minimiser le temps total de mise en œuvre.
- Formuler et résoudre

Formulation des problèmes d'affectation

- Les problèmes d'affectation sont des problèmes de transport équilibrés pour lesquels chaque producteur et consommateur ont une valeur de 1.
- Si toutes les valeurs dans le tableau de transport sont entières, la solution le sera aussi. On peut donc ignorer cette contrainte si elle surgit.
- En passant : peut on avoir un problème d'affectation $m \times n$ avec $n \neq m$? si oui, à quelle situation avons nous affaire, et que faire ?

Trouver une solution

- Dans n'importe quel ensemble de variables de bases pour un problème d'affectation de taille $m \times m$, on aura toujours m variable qui valent 1 et $m - 1$ variables qui valent 0 (pourquoi ?).
- On peut trouver une SBR initiale et résoudre par le simplexe des transports, mais les variables de base des problèmes d'affectation sont très dégénérées et le simplexe n'est pas bien adapté.

La méthode "Hongroise"

1. Trouver l'élément minimum dans chaque ligne de la matrice $m \times m$. Construire une nouvelle matrice en soustrayant de chaque coût le minimum dans sa ligne ; Pour cette nouvelle matrice, trouver le coût minimum dans chaque colonne. Construire une nouvelle matrice en soustrayant dans chaque colonne son minimum.
2. Tracer le nombre minimum de lignes (horizontales ou verticales) pour couvrir tous les zéros dans cette nouvelle matrice (appellée la matrice des coûts réduits). Si moins m lignes sont nécessaires, passer à l'étape 3.
3. Trouver le plus petit élément non-nul k dans la matrice des coûts réduits, qui ne soit pas couvert par une ligne à l'étape 2. Soustraire k de chaque élément non recouvert, puis ajouter k à tous les éléments recouverts par 2 lignes, et retourner à l'étape 2.

Résolution par la méthode Hongroise

1- Minimum par lignes

	Tâche 1	Tâche 2	Tâche 3	Tâche 4	Min
Machine 1	14	5	8	7	5
Machine 2	2	12	6	5	2
Machine 3	7	8	3	9	3
Machine 4	2	4	6	10	2

Résolution par la méthode Hongroise

2- Minimum par colonnes

	Tâche 1	Tâche 2	Tâche 3	Tâche 4
Machine 1	9	0	3	2
Machine 2	0	10	4	3
Machine 3	4	5	0	6
Machine 4	0	2	4	8
Minimum	0	0	0	2

Résolution par la méthode Hongroise

3- lignes

	Tâche 1	Tâche 2	Tâche 3	Tâche 4
Machine 1	+ 9	– 0	– 3	– 0
Machine 2	| 0	10	4	1
Machine 3	+ 4	– 5	– 0	– 4
Machine 4	| 0	2	4	6

Résolution par la méthode Hongroise

3- Minimum par cellules non couvertes : 1

	Tâche 1	Tâche 2	Tâche 3	Tâche 4
Machine 1	+ 10	– 0	– 3	+ 0
Machine 2	| 0	9	3	| 0
Machine 3	+ 5	– 5	– 0	+4
Machine 4	| 0	1	3	| 5

Choix de la base optimale

- A la fin de l'algorithme Hongrois, on a au moins *m* zéros couverts dans la matrice
- Il existe un et un seul ensemble de variables constituées de zéros couverts qui forme un SBR
- Ce SBR est la base optimale pour le problème d'affectation
- Ici : $x_{41} = x_{12} = x_{33} = x_{24} = 1.$

Justification intuitive

- Si une constante k est ajoutée à chaque ligne ou colonne dans un problème de transport équilibré, la solution optimale n'est pas changée.Cela revient à ajouter la constante k au coût, puisque par exemple $\sum_{j=1}^{m} x_{1j} = 1$
- De même, l'étape 3 de la méthode Hongroise ne change pas l'optimum, car elle revient à faire simultanément :
  - ajouter k à chaque coût couvert par une ligne horizontale ;
  - soustraire k à chaque coût non-couvert par une ligne verticale.
- Étape 1 crée au moins un zéro par ligne ou colonne. Étape 3 crée au moins un zéro supplémentaire à chaque fois.
- Ces deux étapes opèrent tout en gardant les coût non-négatifs.
- Au bout du compte, l'optimum est le même que pour le problème initial, et il est forcément constitué de coûts nuls.

Exemple de problème de transbordement

- Soit l'entreprise W, qui fabrique des jouets, l'une à Montpellier, l'autre à Douais. Celle de Montpellier peut en fabriquer 150 par jour, celle de Douais 200.
- Les jouets sont envoyé par la route aux magasins à Lyon et Brest. Les clients dans ces villes achètent 130 jouets.
- Du fait des coûts de transports moins élevés par rail, il peut être moins cher de faire passer les jouets par Nevers et/ou Castres. Les coûts d'acheminement sont les suivants :

	M	D	N	C	L	B
M	0	-	8	13	25	28
D	-	0	15	12	26	25
N	-	-	0	6	16	17
C	-	-	6	0	14	16
L	-	-	-	-	0	-
B	-	-	-	-	-	0

Transformation en problème de transport

Conclusion

- Les problèmes de transport, affectaction et transbordement sont des cas particuliers de LP, qu'on ne résout pas par le simplexe habituel.
- Il existe une méthode de résolution plus simple, non matricielle.
- Si les coût sont entiers, la solution est également entière, donc si on peut formuler un problème sous forme de transport, la solution en entier est également facilement calculable.