Problèmes de transport et transbordement

Résolution

Hugues Talbot

Laboratoire A2SI

9 avril 2009

Plan

Introduction

- Rappel : les problèmes de transport sont des problèmes de programmation linéaires associant des producteurs et des consommateurs ;
- On peut toujours équilibrer un problème de transport de telle manière que toute la production soit consommée, au prix de nœuds supplémentaires ;
- Les problèmes de transport se résolvent plus facilement que les PL standards. Il n'y a pas d'inversion de matrice, les seules opérations sont des additions et soustractions
- Les problèmes de transports entiers ne sont pas plus difficiles que les autres.

Rappels

- On peut représenter un problème de transport dans un tableau ;
- Un problème a m producteurs et n consommateurs est au plus de rang $m + n - 1$ (Q : pourquoi ?) ;
- Un problème de transport équilibré n'a que des égalités (Q : pourquoi ?)
- Un problème avec uniquement des égalités est souvent plus difficile à démarrer (c-à-d trouver une base réalisable initiale) que les problèmes à égalités (Q : pourquoi ?)

Exemple

Problème de transport

			4
			5
3	2	4	

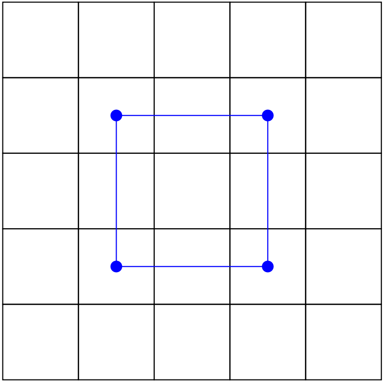
Problème PL équivalent

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- On doit éliminer une contrainte (p.ex. la première ligne) pour en faire un pb de rang $m + n - 1 = 4$
- Trouver une base de départ n'est pas simple. Par exemple $\{x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}\}$ ne marche pas.

Notion de boucle

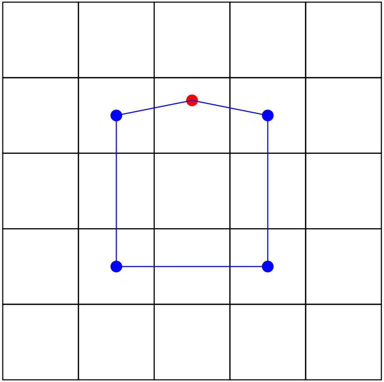
Une boucle est une séquence de 4 cellules au moins, telle que :



- Deux cellules consécutives sont dans la même ligne ou même colonne ;

Notion de boucle

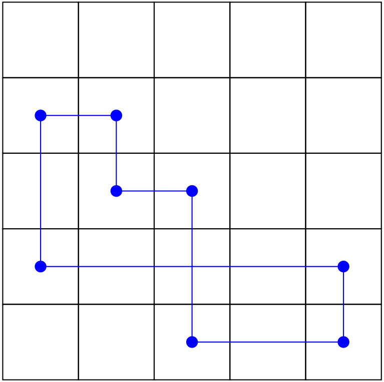
Une boucle est une séquence de 4 cellules au moins, telle que :



- Deux cellules consécutives sont dans la même ligne ou même colonne ;
- Toute suite de trois cellules consécutives ne sont *jamais* dans la même ligne ou colonne ;

Notion de boucle

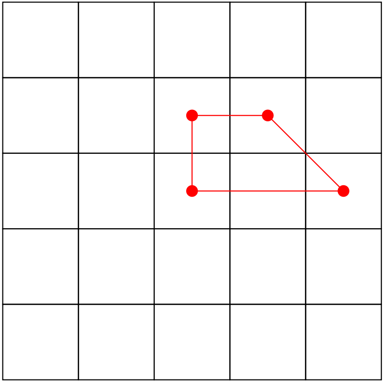
Une boucle est une séquence de 4 cellules au moins, telle que :



- Deux cellules consécutives sont dans la même ligne ou même colonne ;
- Toute suite de trois cellules consécutives ne sont *jamais* dans la même ligne ou colonne ;
- La dernière cellule dans la séquence a une ligne ou une colonne en commun avec la première

Notion de boucle

Une boucle est une séquence de 4 cellules au moins, telle que :



- Deux cellules consécutives sont dans la même ligne ou même colonne ;
- Toute suite de trois cellules consécutives ne sont *jamais* dans la même ligne ou colonne ;
- La dernière cellule dans la séquence a une ligne ou une colonne en commun avec la première

Théorème des boucles

Théorème

Soit un problème de transport avec m *producteurs et* n *consommateurs. Les cellules qui correspondent à un ensemble de* $m+n-1$ *variables ne contiennent aucune boucle si et seulement si les* $m+n-1$ *variables forment une solution de base.*

Démonstration.

Ce théorème découle du fait qu'un ensemble de $m+n-1$ cellules ne contiennent aucune boucle si et seulement si les $m+n-1$ colonnes de A qui correspondent à ces cellules sont linéairement indépendantes. $\square$

Méthodes pour trouver une SBR initiale

Il y a trois méthodes classiques

1. La méthode du coin supérieur gauche ;
2. La méthode du coût minimum ;
3. La méthode de VOGEL.

La méthode du coin supérieur gauche (MCSG)

- On commence en haut à gauche par x_{11}, et on augmente x_{11} autant que possible ;

				5
				1
				3
2	4	2	1	

La méthode du coin supérieur gauche (MCSG)

2				3
				1
				3
X	4	2	1	

- On commence en haut à gauche par x_{11}, et on augmente x_{11} autant que possible ;
- On élimine du tableau la ligne ou la colonne saturée, on diminue de x_{11} la ligne ou colonne non saturée ;

La méthode du coin supérieur gauche (MCSG)

2	3			X
				1
				3
X	1	2	1	

- On commence en haut à gauche par x_{11}, et on augmente x_{11} autant que possible ;
- On élimine du tableau la ligne ou la colonne saturée, on diminue de x_{11} la ligne ou colonne non saturée ;
- On continue cette procédure récursivement sur le reste du tableau ;

La méthode du coin supérieur gauche (MCSG)

~~2~~	~~3~~			X
	~~1~~			X
				3
X	0	2	1	

- On commence en haut à gauche par x_{11}, et on augmente x_{11} autant que possible ;
- On élimine du tableau la ligne ou la colonne saturée, on diminue de x_{11} la ligne ou colonne non saturée ;
- On continue cette procédure récursivement sur le reste du tableau ;
- Dans le cas où une augmentation sature la ligne et la colonne en même temps, on choisit d'éliminer seulement soit la ligne, soit la colonne ;

La méthode du coin supérieur gauche (MCSG)

2	3			X
	1			X
	0			3
X	X	2	1	

- On commence en haut à gauche par x_{11}, et on augmente x_{11} autant que possible ;
- On élimine du tableau la ligne ou la colonne saturée, on diminue de x_{11} la ligne ou colonne non saturée ;
- On continue cette procédure récursivement sur le reste du tableau ;
- Dans le cas où une augmentation sature la ligne et la colonne en même temps, on choisit d'éliminer seulement soit la ligne, soit la colonne ;
- Une saturation à zéro donne une base initiale dégénérée, comme ici ;

La méthode du coin supérieur gauche (MCSG)

2	3			X
	1			X
	0	2		1
X	X	X	1	

- On commence en haut à gauche par x_{11}, et on augmente x_{11} autant que possible ;
- On élimine du tableau la ligne ou la colonne saturée, on diminue de x_{11} la ligne ou colonne non saturée ;
- On continue cette procédure récursivement sur le reste du tableau ;
- Dans le cas où une augmentation sature la ligne et la colonne en même temps, on choisit d'éliminer seulement soit la ligne, soit la colonne ;
- Une saturation à zéro donne une base initiale dégénérée, comme ici ;

La méthode du coin supérieur gauche (MCSG)

2	3			X
	1			X
	0	2	1	X
X	X	X	X	

- On commence en haut à gauche par x_{11}, et on augmente x_{11} autant que possible ;
- On élimine du tableau la ligne ou la colonne saturée, on diminue de x_{11} la ligne ou colonne non saturée ;
- On continue cette procédure récursivement sur le reste du tableau ;
- Dans le cas où une augmentation sature la ligne et la colonne en même temps, on choisit d'éliminer seulement soit la ligne, soit la colonne ;
- Une saturation à zéro donne une base initiale dégénérée, comme ici ;
- La dernière case sature à la fois sa ligne et sa colonne.

Solution de base initiale $\{x_{11} = 2, x_{12} = 3, x_{22} = 1, x_{32} = 0, x_{33} = 2, x_{34} = 1\}$

Éléments de justification pour la MCSG

- Toutes les variables sont positives ou nulles ;
- La méthode du CSG assure que $m + n - 1$ variables sont assignées ;
- La dernière affectation sature deux contraintes, donc $m + n$ contraintes sont satisfaites. Autrement dit toutes les contraintes sont satisfaites (puisque toutes les lignes et colonnes sont saturées) ;
- La méthode du CSG assure que les variables assignées ne peuvent pas former de boucle ;
- Les variables assignées forment donc une solution de base réalisable par le théorème des boucles.

Faiblesses de la MCSG

- La méthode du CSG donne bien un SBR, mais elle peut-être très loin de l'optimal ;
- La méthode du CSG a tendance à donner des SBR dégénérées (avec des variables de base à zéro) ;
- Elle ne tient pas compte du tout du coût.
- Pour tenter de pallier ces problèmes, nous allons explorer deux autres méthodes. La première est celle du coût minimum.

La méthode du coût minimum

2	3	5	6	5
2	1	3	5	10
3	8	4	6	15
12	8	4	6	

- On commence par chercher la variable x_{ij} avec le coût de transport minimum ;

La méthode du coût minimum

2	3	5	6	5
2	8 · 1	3	5	2
3	8	4	6	15
12	X	4	6	

- On commence par chercher la variable x_{ij} avec le coût de transport minimum ;
- On sature sa valeur, et on ferme la ligne ou colonne correspondante ;

La méthode du coût minimum

$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	5
2 $\boxed{2}$	8 $\boxed{1}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	X
$\boxed{3}$	$\boxed{8}$	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$	15
10	X	4	6	

- On commence par chercher la variable x_{ij} avec le coût de transport minimum ;
- On sature sa valeur, et on ferme la ligne ou colonne correspondante ;
- Répéter la procédure avec les cases non fermées ;

La méthode du coût minimum

5 $\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	X
2 $\boxed{2}$	8 $\boxed{1}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	X
$\boxed{3}$	$\boxed{8}$	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$	15
5	X	4	6	

- On commence par chercher la variable x_{ij} avec le coût de transport minimum ;
- On sature sa valeur, et on ferme la ligne ou colonne correspondante ;
- Répéter la procédure avec les cases non fermées ;
- Si une variable satisfait à la fois la contrainte de ligne et de colonne, ne fermer qu'une d'entre elles ;

La méthode du coût minimum

5	2		3		5		6	X
2	2	8	1		3		5	X
5	3		8		4		6	10
X		X		4		6		

- On commence par chercher la variable x_{ij} avec le coût de transport minimum ;
- On sature sa valeur, et on ferme la ligne ou colonne correspondante ;
- Répéter la procédure avec les cases non fermées ;
- Si une variable satisfait à la fois la contrainte de ligne et de colonne, ne fermer qu'une d'entre elles ;

La méthode du coût minimum

5	2		3		5		6	X
2	2	8	1		3		5	X
5	3		8	4	4		6	6
X		X		X		6		

- On commence par chercher la variable x_{ij} avec le coût de transport minimum ;
- On sature sa valeur, et on ferme la ligne ou colonne correspondante ;
- Répéter la procédure avec les cases non fermées ;
- Si une variable satisfait à la fois la contrainte de ligne et de colonne, ne fermer qu'une d'entre elles ;

La méthode du coût minimum

5 (2)	(3)	(5)	(6)	X
2 (2)	8 (1)	(3)	(5)	X
5 (3)	(8)	4 (4)	6 (6)	X
X	X	X	X	

- On commence par chercher la variable x_{ij} avec le coût de transport minimum ;
- On sature sa valeur, et on ferme la ligne ou colonne correspondante ;
- Répéter la procédure avec les cases non fermées ;
- Si une variable satisfait à la fois la contrainte de ligne et de colonne, ne fermer qu'une d'entre elles ;
- Lorsqu'il ne reste plus qu'une case, fermer sa ligne et sa colonne.

Justification de la MCM

- La solution trouvée est une SBR initiale par les mêmes arguments que pour la MCSG ;
- On peut espérer un moindre coût total de part la méthodologie.
- Ceci dit, comme l'algorithme de sélection de variables est glouton, on trouve des contre-exemples défavorables pour cette méthode :

6	7	8	10
15	80	78	15
15	5	5	

- La méthode de VOGEL est plus favorable, mais on ne la verra pas dans le cadre de ce cours.

Le simplexe des problèmes de transport

Étapes de l'algorithme

1. Si on n'est pas à l'optimum (voir plus loin), alors :
   1.1 Déterminer quelle variable doit entrer dans le système de base (voir plus loin) ;
   1.2 Trouver la boucle impliquant la nouvelle variable et un sous-ensemble des variables existantes ;
   1.3 Énumérez les variables dans la boucle à partir de la nouvelle variable prenant l'index 0 ;
   1.4 Trouver la cellule impaire dans la boucle contenant la variable avec la plus petite valeur θ ;
   1.5 Augmenter de θ toutes les variables d'indice pair dans la boucle, et réduire de θ toutes les variables d'indice impair ;
   1.6 Les valeurs des variables hors-boucle ne changent pas.
2. Retourner en 1.

Illustration sur le pb. de distribution d'électricité

On se rappelle le problème de distribution d'électricité du cours précédent :

	Ville 1	Ville 2	Ville 3	Ville 4	Offre
centrale 1	0 $\boxed{8}$	0 $\boxed{6}$	0 $\boxed{10}$	0 $\boxed{9}$	35
centrale 2	0 $\boxed{9}$	0 $\boxed{12}$	0 $\boxed{13}$	0 $\boxed{7}$	50
centrale 3	0 $\boxed{14}$	0 $\boxed{9}$	0 $\boxed{16}$	30 $\boxed{5}$	40
Demande	45	20	30	30	

Résolution du problème d'électricité

8	6	10	9	35
9	12	13	7	50
14	9	16	5	40
45	20	30	30	

- Avant initialisation par la MCSG

Résolution du problème d'électricité

8 35	6	10	9	35
9 10	12 20	13 20	7	50
14	9	16 10	5 30	40
45	20	30	30	

- Avant initialisation par la MCSG
- Après initialisation par la MCSG

Calcul des coûts réduits

- On se rappelle de la formule $\overline{\mathbf{c}}_e^T = \mathbf{c}_e^T - \mathbf{c}_b^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{E}$ du simplexe « normal ».
- Ici il nous faut calculer $\mathbf{c}_b^T \mathbf{B}^{-1}$, qui est un vecteur de même longueur que $\mathbf{c}_b$, c'est à dire un vecteur de $m + n - 1$ éléments.
- On pose $\mathbf{c}_b^T \mathbf{B}^{-1} = [u_2 u_3 \dots u_m v_1 v_2 \dots v_n]$, où les u_i sont les contraintes de l'offre et les v_i les contraintes de la demande. Notez qu'on a abandonné une contrainte pour en garder $m + n - 1$, qui est le rang du problème (voir début de ce cours).
- Le coût réduit d'une variable de base est nul, donc, pour toute variable de base x_{ij}, nous avons

$$c_{ij} = \mathbf{c}_b \mathbf{B} \mathbf{a}_{ij}$$

où c_{ij} est le coût associé à la variable x_{ij} et $\mathbf{a}_{ij}$ la colonne de $\mathbf{A}$ associée à la même variable.

Problème de PL associé au problème d'électricité

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{24} \\ x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \\ x_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 50 \\ 40 \\ 45 \\ 20 \\ 30 \\ 30 \end{bmatrix}$$

NOTE : on doit éliminer la première ligne !

Illustration sur le problème d'électricité

35 (8)	(6)	(10)	(9)	35
10 (9)	20 (12)	20 (13)	(7)	50
(14)	(9)	10 (16)	30 (5)	40
45	20	30	30	

- $\bar{c}_{11} = [u_2 u_3 v_1 v_2 v_3 v_4] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 8 =$

  $v_1 - 8 = 0$

Illustration sur le problème d'électricité

35 / 8	6	10	9	35
10 / 9	20 / 12	20 / 13	7	50
14	9	10 / 16	30 / 5	40
45	20	30	30	

- $v_1 - 8 = 0$
- $\overline{c}_{21} = [u_2 u_3 v_1 v_2 v_3 v_4] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 9 =$

  $u_2 + v_1 - 9 = 0$

Illustration sur le problème d'électricité

35 (8)	(6)	(10)	(9)	35
10 (9)	20 (12)	20 (13)	(7)	50
(14)	(9)	10 (16)	30 (5)	40
45	20	30	30	

- $v_1 - 8 = 0$
- $u_2 + v_1 - 9 = 0$
- $\overline{c}_{22} = [u_2 u_3 v_1 v_2 v_3 v_4] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 12 =$

  $u_2 + v_2 - 12 = 0$

Illustration sur le problème d'électricité

35 (coût 8)	(coût 6)	(coût 10)	(coût 9)	35
10 (coût 9)	20 (coût 12)	20 (coût 13)	(coût 7)	50
(coût 14)	(coût 9)	10 (coût 16)	30 (coût 5)	40
45	20	30	30	

- $v_1 - 8 = 0$
- $u_2 + v_1 - 9 = 0$
- $u_2 + v_2 - 12 = 0$
- $\bar{c}_{23} = [u_2 u_3 v_1 v_2 v_3 v_4] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 13 =$

  $u_2 + v_3 - 13 = 0$

Illustration sur le problème d'électricité

35 (8)	(6)	(10)	(9)	35
10 (9)	20 (12)	20 (13)	(7)	50
(14)	(9)	10 (16)	30 (5)	40
45	20	30	30	

- $v_1 - 8 = 0$
- $u_2 + v_1 - 9 = 0$
- $u_2 + v_2 - 12 = 0$
- $u_2 + v_3 - 13 = 0$
- $\bar{c}_{33} = [u_2 u_3 v_1 v_2 v_3 v_4] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 16 =$

  $u_3 + v_3 - 16 = 0$

Illustration sur le problème d'électricité

35 (8)	(6)	(10)	(9)	35
10 (9)	20 (12)	20 (13)	(7)	50
(14)	(9)	10 (16)	30 (5)	40
45	20	30	30	

- $v_1 - 8 = 0$
- $u_2 + v_1 - 9 = 0$
- $u_2 + v_2 - 12 = 0$
- $u_2 + v_3 - 13 = 0$
- $u_3 + v_3 - 16 = 0$

$$\overline{c}_{34} = [u_2 u_3 v_1 v_2 v_3 v_4] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 5 =$$

$u_3 + v_4 - 5 = 0$

Illustration sur le problème d'électricité

35 [8]	[6]	[10]	[9]	35
10 [9]	20 [12]	20 [13]	[7]	50
[14]	[9]	10 [16]	30 [5]	40
45	20	30	30	

- $v_1 - 8 = 0$
- $u_2 + v_1 - 9 = 0$
- $u_2 + v_2 - 12 = 0$
- $u_2 + v_3 - 13 = 0$
- $u_3 + v_3 - 16 = 0$
- $u_3 + v_4 - 5 = 0$

On voit que si on pose $u_1 = 0$, toutes ces équations se réduisent à $u_i + v_j = c_{ij}$ pour les variables de base x_{ij}.

Illustration sur le problème d'électricité

35 (8)	(6)	(10)	(9)	35
10 (9)	20 (12)	20 (13)	(7)	50
(14)	(9)	10 (16)	30 (5)	40
45	20	30	30	

- $u_1 = 0$
- $u_1 + v_1 - 8 = 0$
- $u_2 + v_1 - 9 = 0$
- $u_2 + v_2 - 12 = 0$
- $u_2 + v_3 - 13 = 0$
- $u_3 + v_3 - 16 = 0$
- $u_3 + v_4 - 5 = 0$

Facile à résoudre ! !

On voit que si on pose $u_1 = 0$, toutes ces équations se réduisent à $u_i + v_j = c_{ij}$ pour les variables de base x_{ij}.

Illustration sur le problème d'électricité

35 [8]	[6]	[10]	[9]	35
10 [9]	20 [12]	20 [13]	[7]	50
[14]	[9]	10 [16]	30 [5]	40
45	20	30	30	

- $u_1 = 0$
- $v_1 = 8$
- $u_2 = 1$
- $v_2 = 11$
- $v_3 = 12$
- $u_3 = 4$
- $v_4 = 1$

On voit que si on pose $u_1 = 0$, toutes ces équations se réduisent à $u_i + v_j = c_{ij}$ pour les variables de base x_{ij}.

Calcul des coûts réduits

- Une fois qu'on a calculé les u_i et v_j le reste est facile ;
- En effet, les coûts réduits se calculent, pour toutes les variables hors base, par la formule suivante :

$$\overline{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

- Dans l'exemple de la distribution d'électricité, on obtient :

$$\begin{array}{ll} \overline{c}_{12} = 6 - 11 + 6 = -5 & \overline{c}_{13} = 10 - 0 - 12 = -2 \\ \overline{c}_{14} = 9 + 0 - 1 = 8 & \overline{c}_{24} = 7 - 1 - 1 = 5 \\ \overline{c}_{31} = 14 - 4 - 8 = 2 & \overline{c}_{32} = 9 - 4 - 11 = -6 \end{array}$$

- Ici on cherche à minimiser, donc on choisit le coût réduit ayant la plus grande capacité à réduire le coût, soit $\overline{c}_{32}$. On fait donc entrer x_{32} dans la base.

Échange de variable

35 [8]	[6]	[10]	[9]	35
10 [9]	20 [12]	20 [13]	[7]	50
[14]	[9]	10 [16]	30 [5]	40
45	20	30	30	

- On fait entrer x_{32} dans la base ;
- Cela crée une boucle unique $x_{32} - x_{22} - x_{23} - x_{33}$;
- Les nœuds impairs de cette boucle sont x_{22} et x_{33}. La valeur de θ est la plus faible des deux, soit 10 ;
- On augmente les nœuds pairs (soient x_{32} et x_{23} de θ et on diminue d'autant les nœuds impairs ;
- Effectivement, on a échangé x_{33} avec x_{32}.

Échange de variable

35 [8]	[6]	[10]	[9]	35
10 [9]	10 [12]	30 [13]	[7]	50
[14]	10 [9]	[16]	30 [5]	40
45	20	30	30	

- On doit recalculer les coûts réduits
- On doit résoudre

$$
\begin{array}{lll}
u_1 = 0 & u_1 + v_1 = 8 & u_2 + v_1 = 9 \\
u_2 + v_2 = 12 & u_2 + v_3 = 13 & u_3 + v_2 = 9 \\
u_3 + v_4 = 5 & &
\end{array}
$$

- On doit ensuite calculer $\overline{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ pour toutes les variables hors-base.
- On trouve que les seules négatives sont

$$\overline{c}_{12} = -5, \overline{c}_{24} = -1, \overline{c}_{13} = -2,$$

- Donc x_{12} entre dans la base.

Échange de variable

35 $\boxed{8}$	$\boxed{6}$	$\boxed{10}$	$\boxed{9}$	35
10 $\boxed{9}$	10 $\boxed{12}$	30 $\boxed{13}$	$\boxed{7}$	50
$\boxed{14}$	10 $\boxed{9}$	$\boxed{16}$	30 $\boxed{5}$	40
45	20	30	30	

- On fait entrer x_{12} dans la base ;
- Cela crée une boucle unique $x_{12} - x_{22} - x_{21} - x_{11}$;
- Les nœuds impairs de cette boucle sont x_{22} et x_{11}. La valeur de θ est la plus faible des deux, soit 10 ;
- On augmente les nœuds pairs (soient x_{12} et x_{21} de θ et on diminue d'autant les nœuds impairs ;
- Effectivement, on a échangé x_{22} avec x_{12}.

Échange de variable

25 (8)	10 (6)	(10)	(9)	35
20 (9)	(12)	30 (13)	(7)	50
(14)	10 (9)	(16)	30 (5)	40
45	20	30	30	

- On doit recalculer de nouveau les coûts réduits
- On doit résoudre

$$\begin{array}{lll} u_1 = 0 & u_1 + v_1 = 8 & u_1 + v_2 = 6 \\ u_2 + v_1 = 9 & u_2 + v_3 = 13 & u_3 + v_2 = 9 \\ u_3 + v_4 = 5 & & \end{array}$$

- On doit ensuite calculer $\overline{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ pour toutes les variables hors-base.
- On trouve que le seul coût réduit négatif est

$$\overline{c}_{13} = -2$$

- Donc x_{13} entre dans la base.

Échange de variable

25 [8]	10 [6]	[10]	[9]	35
20 [9]	[12]	30 [13]	[7]	50
[14]	10 [9]	[16]	30 [5]	40
45	20	30	30	

- On fait entrer x_{13} dans la base ;
- Cela crée une boucle unique $x_{13} - x_{23} - x_{21} - x_{11}$;
- Les nœuds impairs de cette boucle sont x_{23} et x_{11}. La valeur de θ est la plus faible des deux, soit 25 ;
- On augmente les nœuds pairs (soient x_{13} et x_{21} de θ et on diminue d'autant les nœuds impairs ;
- Effectivement, on a échangé x_{11} avec x_{13}.

Échange de variable

$\boxed{8}$	10 $\boxed{6}$	25 $\boxed{10}$	$\boxed{9}$	35
45 $\boxed{9}$	$\boxed{12}$	5 $\boxed{13}$	$\boxed{7}$	50
$\boxed{14}$	10 $\boxed{9}$	$\boxed{16}$	30 $\boxed{5}$	40
45	20	30	30	

- On doit recalculer de nouveau les coûts réduits
- On doit résoudre

$$
\begin{array}{lll}
u_1 = 0 & u_1 + v_2 = 6 & u_1 + v_3 = 10 \\
u_2 + v_1 = 9 & u_2 + v_3 = 13 & u_3 + v_2 = 9 \\
u_3 + v_4 = 5 & &
\end{array}
$$

- On doit ensuite calculer $\overline{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ pour toutes les variables hors-base.
- On ne trouve aucun coût réduit négatif
- On a trouvé l'optimum !
- l'optimum est $z = 6 * 10 + 10 * 25 + 45 * 9 + 5 * 13 + 10 * 9 + 30 * 5 = 1020$.

Définition

- Un problème de transport pur achemine directement du producteur au consommateur ;
- Dans un problème de transbordement, on peut acheminer par des points intermédiaires du réseau ;
- On résout ce type de problème en les transformant en problèmes de transport purs.

Exemple de problème de transbordement

- Soit l'entreprise W, qui fabrique des jouets, l'une à Montpellier, l'autre à Douais. Celle de Montpellier peut en fabriquer 150 par jour, celle de Douais 200.
- Les jouets sont envoyé par la route aux magasins à Lyon et Brest. Les clients dans ces villes achètent 130 jouets.
- Du fait des coûts de transports moins élevés par rail, il peut être moins cher de faire passer les jouets par Nevers et/ou Castres. Les coûts d'acheminement sont les suivants :

	M	D	N	C	L	B
M	0	-	8	13	25	28
D	-	0	15	12	26	25
N	-	-	0	6	16	17
C	-	-	6	0	14	16
L	-	-	-	-	0	-
B	-	-	-	-	-	0

Transformation en problème de transport

Conclusion

- Les problèmes de transport, affectaction et transbordement sont des cas particuliers de LP, qu'on ne résout pas par le simplexe habituel.
- Il existe une méthode de résolution plus simple, non matricielle.
- Si les coût sont entiers, la solution est également entière, donc si on peut formuler un problème sous forme de transport, la solution en entier est également facilement calculable.

Conclusion générale sur le cours

- Ce cours est une introduction à la *recherche opérationnelle* ;
- C'est un domaine très important, dont le domaine d'application grandit chaque jour ;
- Récente pub d'IBM : 20% des containers arrivant aux USA sont vide !
- Récent résultat théoriques : par optimisation *convexe* on peut dans certains cas échantillonner plus efficacement qu'avec Shannon (Terence Tao, médaille Fields, UCLA 2008) *compressed sensing*.
- Peu de gens savent manier l'optimisation. J'espère que cette discipline vous sera utile.
- Tenez moi au courant !