

Esiee-Paris, majeure Informatique  
cours Automates, langages et calculabilité (IF4-LLC)  
feuille d'exercices n° 2 – 8 décembre 2011

**Exercice 1.** Les langages ci-dessous sont hors-contextes et non réguliers. Donner pour chacun d'eux une grammaire hors-contexte qui le génère et vérifier par simulation Prolog que votre grammaire est correcte.

1.  $L_1 = \{ c \in \{0, 1\}^* ; 0(c) > 1(c) \}$  ;
2.  $L_2 = \{ c \in \{0, 1\}^* ; 0(c) = 2 \times 1(c) \}$  ;
3.  $L_3 = \{ c \in \{0, 1\}^* ; c \neq \text{renversée}(c) \}$  ;
4.  $L_4 = \{ c\#c' ; c, c' \in \{0, 1\}^* \text{ et } |c| \neq |c'| \}$ . Remarque :  $L_4 \subseteq \{\#, 0, 1\}^*$  ;
5.  $L_5 = \{ c\#c' ; c, c' \in \{0, 1\}^* \text{ et } c \neq c' \}$  ;
6.  $L_6 = \{ cc' \in \{0, 1\}^* ; |c| = |c'| \text{ et } c \neq c' \}$  ;
7.  $L_7 = \{ 0^p 1^q 0^r ; p > r \}$  ;
8.  $L_8 = \{ 0^p 1^q 0^r ; p + q = r \}$  ;
9.  $L_9 = \{ 0^p 1^q 0^r ; p + q > r \}$  ;
10.  $L_{10} = \{ 0^p 1^q 0^r ; p + r > q \}$ .

Hors séance de travaux dirigés : pour chacun de ces langages, donner un automate à pile qui le reconnaît et vérifier par simulation Prolog que votre automate est correct.

**Exercice 2.** Le langage de Dick est le langage des expressions *bien parenthésées*. Voici quelques exemples de mots de Dick sur l'alphabet  $\Sigma = \{ \text{ ), (, ], [ \}$  :

$\epsilon, (), [()], (()), ([)], [[]], []()(), []()[], []([)]([(((())()))), \dots$

Donner une grammaire hors-contexte générant le langage de Dick sur l'alphabet  $\Sigma$  et un automate à pile reconnaisseur de ce langage. Vérifier par simulation Prolog que la grammaire et l'automate sont corrects.

**Exercice 3.** Montrer par les grammaires que les langages hors-contextes sont clos par les opérations d'union, concaténation et itération (opérations dites *régulières*) :

- $L$  et  $L'$  langages hors-contextes  $\Rightarrow L \cup L'$  hors-contexte ;
- $L$  et  $L'$  langages hors-contextes  $\Rightarrow LL'$  hors-contexte ;
- $L$  langage hors-contexte  $\Rightarrow L^*$  hors-contexte.

**Exercice 4.** On admettra le résultat suivant, non démontré en cours cette année par manque de temps : le langage  $L = \{0^n 1^n 0^n ; n \geq 0\}$  n'est pas un langage hors-contexte.

Démontrer les deux résultats suivants :

1.  $L$  et  $L'$  langages hors-contextes  $\nRightarrow L \cap L'$  hors-contexte, c'est-à-dire : les langages hors-contextes ne sont pas clos par intersection ;
2.  $L$  hors-contexte  $\nRightarrow \bar{L}$  hors-contexte, c'est-à-dire : les langages hors-contextes ne sont pas clos par complémentation. Pour ce résultat, on recommande une démonstration algébrique.